

Univerzita Pardubice

Fakulta ekonomicko-správní

Hry s neúplnou informací v ekonomickém rozhodování

Jana Macháčková

Diplomová práce

2019

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Jana Macháčková**
Osobní číslo: **E17466**
Studijní program: **N6208 Ekonomika a management**
Studijní obor: **Ekonomika a management podniku**
Název tématu: **Hry s neúplnou informací v ekonomickém rozhodování**
Zadávající katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cíl práce: Shrnout základní poznatky teorie her, následně věnovat pozornost zejména těm, které se týkají her s neúplnou, popř. asymetrickou informací. Na vhodných příkladech ukázat možnost aplikování uvedených poznatků v ekonomickém rozhodování.

Osnova:

- Historie, předmět a základní pojmy teorie her.
- Hry s neúplnou informací a asymetrickou informací: přehled základních poznatků, příklady.
- Statická a dynamická bayesovská hra, rovnovážné řešení.
- Využití poznatků o hrách s neúplnou informací v ekonomickém rozhodování.

Rozsah grafických prací:

—

Rozsah pracovní zprávy:

cca 50 stran

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

AUMANN, Robert J., MASCHLER, Michael, STEARNS, Richard E. Repeated Games with Incomplete Information. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1995. 342s. ISBN 0-262-01147-6.

CHVOJ, Martin. Pokročilá teorie her ve světě kolem nás. Praha: Grada, 2013. 227s. ISBN 978-80-247-4620-3.

MAŇAS, Miroslav. Teorie her a její aplikace. 1. vyd. Praha: SNTL, 1991. 278 s. ISBN 80-03-00358-X.

OSBORNE, Martin J., RUBINSTEIN, Ariel. A Course in Game Theory. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1994. 368s. ISBN 0-262-65040-1.



Vedoucí diplomové práce:

Mgr. Libor Koudela, Ph.D.

Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: **3. září 2018**

Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2019**



doc. Ing. Romana Provazníková, Ph.D.
děkanka

L.S.



doc. Ing. Marcela Kožená, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 3. září 2018

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 25. 4. 2019

Jana Macháčková

PODĚKOVÁNÍ:

Tímto bych ráda poděkovala svému vedoucímu práce Mgr. Liborovi Koudelovi, Ph.D. za odborné vedení diplomové práce, cenné rady a připomínky. Dále bych chtěla poděkovat celé své rodině za trpělivost a podporu po celou dobu studia.

ANOTACE

Tato diplomová práce se zabývá teorií her a jejím využitím v ekonomické praxi. Jsou zde uvedeny základní poznatky a přiblížen jejich historický vývoj. Hlavní část práce je věnována teorii her s neúplnými informacemi. Její praktické využití je ukázáno na vybraných příkladech.

KLÍČOVÁ SLOVA

Teorie her, historie, neúplné informace, signální hry, aukce

TITLE

Games with incomplete information in economic decision-making

ANNOTATION

This thesis deals with theory of games and its applications in economics. Basic concepts and their historical development are presented. The main part is devoted to theory of games with incomplete information. Its practical use is shown on selected examples.

KEYWORDS

Game theory, history, incomplete information, signaling games, auctions

OBSAH

ÚVOD	11
1 ZÁKLADNÍ POZNATKY TEORIE HER	12
1.1 MOŽNOSTI VYUŽITÍ TEORIE HER	12
1.2 PŘEDMĚT TEORIE HER	13
1.3 HISTORICKÉ POZNATKY	13
1.3.1 Počátky teorie her	13
1.3.2 Systematický přístup	14
1.3.3 Hry s neúplnou informací	16
1.3.4 John Charles Harsanyi	16
1.3.5 Robert John Aumann	18
2 CHARAKTERISTIKA TEORIE HER	20
2.1 ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE HER	20
2.2 KLASIFIKACE HER	21
2.2.1 Klasifikace podle verze z roku 1986	21
2.2.2 Klasifikace v moderním pojetí	22
2.3 DĚLENÍ HER PODLE CHARAKTERISTIK	23
2.3.1 Podle počtu účastníků	23
2.3.2 Podle přítomnosti náhodných jevů	24
2.3.3 Podle dostupných informací	24
2.3.4 Podle počtu možných strategií	24
2.3.5 Podle způsobu rozdělení výher	24
2.4 MATEMATICKÉ MODELY K POPISU ROZHODOVACÍCH SITUACÍ	25
2.4.1 Hra v normálním tvaru	25
2.4.2 Hra ve tvaru charakteristické funkce	26
2.4.3 Hra v explicitním tvaru	26
2.5 NASHOVA ROVNOVÁHA	26
2.6 STATICKÉ HRY S ÚPLNOU INFORMACÍ	27
2.7 DYNAMICKÉ HRY S ÚPLNOU INFORMACÍ	28
2.8 ANTAGONISTICKÉ HRY	28
2.8.1 Hry s konstantním součtem	29
2.8.2 Hry s nulovým součtem	30
2.9 MATICOVÉ HRY	31

2.10	NEANTAGONISTICKÉ HRY.....	33
2.10.1	Hry s nekonstantním součtem.....	33
2.10.2	Kooperativní hry	34
2.10.3	Nekooperativní hry	34
2.10.4	Věznovo dilemma	37
2.11	OPAKOVANÉ HRY	38
2.11.1	Opakované hry s úplnou informací.....	38
2.12	HRY S ÚPLNOU A NEÚPLNOU INFORMACÍ	39
2.12.1	Hry s úplnou informací	39
2.12.2	Hry s nedokonalou informací	39
2.12.3	Hry s neúplnou informací.....	40
2.12.4	Rovnováhy her	40
3	HRY S NEÚPLNOU INFORMACÍ.....	41
3.1	STATICKÁ BAYESOVSKÁ HRA	42
3.2	OPAKOVANÉ HRY S NEÚPLNÝMI INFORMACEMI.....	47
4	APLIKACE HER S NEÚPLNOU INFORMACÍ.....	50
4.1	SIGNÁLNÍ HRY	50
4.1.1	Spenceův signální model práce	51
4.1.2	Firemní investice a kapitálová struktura	55
4.2	AUKCE	57
4.2.1	Historie	57
4.2.2	Klasifikace aukcí	59
4.2.3	Typy aukcí s jedním typem objektů.....	60
4.2.4	Využití bayesovských her v aukcích	61
4.2.5	Analýza aukce první ceny	62
4.2.6	Analýza aukce druhé ceny.....	63
5	VYUŽITÍ HER S NEÚPLNOU INFORMACÍ V EKONOMII.....	65
5.1	PŘÍKLAD 1: NAJÍMÁNÍ NA TRHU PRÁCE.....	65
5.2	PŘÍKLAD 2: VSTUP FIRMY NA TRH	68
5.3	PŘÍKLAD 3: UZAVŘENÁ AUKCE PRVNÍ CENY	73
5.4	PŘÍKLAD 4: UZAVŘENÁ AUKCE DRUHÉ CENY	76
	ZÁVĚR	78
	POUŽITÁ LITERATURA.....	79

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Rovnováhy jednotlivých her	40
Tabulka 2: Výplaty investora A.....	74
Tabulka 3: Očekávané zisky jednotlivých nabídek	75
Tabulka 4: Výplaty investora A.....	76
Tabulka 5: Očekávané zisky jednotlivých nabídek	77

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Schéma hry	48
Obrázek 2: Vztah mezi funkcemi u a Cav u	49
Obrázek 3: Harsanyiho transformace hry.....	66
Obrázek 4: Harsanyiho transformace hry.....	69
Obrázek 5: Strategie hry.....	72
Obrázek 6: Strategie hry.....	72

SEZNAM ZKRATEK

ACDA	U. S. Arms Control and Disarmament Agency (Agentura Spojených států pro kontrolu zbraní a odzbrojení)
B2B	Business to Business (obchodník – obchodník)
DNA	Deoxyribonucleic acid (Deoxyribonukleová kyselina)
MIT	Massachusetts Institute of Technology (Massachusettský technický institut)

ÚVOD

Teorie her je velkým přínosem v oblasti ekonomie, kde je třeba neustále o něčem rozhodovat. Prakticky každý den jsme všichni postaveni před situací, kdy si musíme zvolit správnou cestu k co nejlepšímu řešení. Správný a rychlý výběr optimální strategie je základem úspěchu jak v osobním, tak v pracovním životě. Ekonomické subjekty v jednom kole řeší, jak se mají zachovat, aby dosáhly svých cílů, maximalizovaly své zisky, minimalizovaly výši nákladů atd. Rozhodnutí však nezáleží pouze na nich, odvíjí se od chování státu, konkurenčních firem, od situace na trhu, často ale zasahuje i náhoda. Konfliktní, možná lépe rozhodovací situace se často při svém řešení setkávají s nedostatkem informací, kdy jedna strana při svém rozhodování neví, kdo stojí na straně druhé a co zamýšlí, jak je protivník silný nebo jaké má informace. Tyto problémy a neznalosti je možné řešit pomocí teorie her s neúplnými informacemi, jejíž poznatky jsou tématem této diplomové práce.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. První kapitola je věnována významu teorie her a zabývá se jejím vznikem a vývojem. Jsou zde uvedeny nejvýznamnější osobnosti, z nichž mnozí za svou práci získali Nobelovu cenu.

Druhá kapitola pojednává o členění her na základě několika charakteristik a o základních poznatcích her s úplnými informacemi, které jsou mnohdy potřebné pro pochopení další kapitoly. Ta se zabývá situacemi, kdy nám chybí potřebné informace.

Třetí a čtvrtá kapitola jsou v této práci stěžení. Obsahují hry s neúplnými informacemi, nazývané též bayesovské hry, a jejich možné využití v dalších aplikacích. Jedná se o případ rozhodovací situace, kde kromě skutečných účastníků konfliktu vystupuje další hráč, náhodný mechanismus, nazývaný také jako šance nebo náhoda. Představeny jsou hry statické a hry opakované, signální hry a aukce.

Poslední pátá kapitola objasňuje praktický význam teorie her formou příkladů využitelných v ekonomii. První příklad řeší situaci, kdy jsou neúplné informace na jedné straně. Druhý příklad je postaven na neznalosti informací obou stran. Třetí a čtvrtý příklad ukazuje výpočet optimální nabídky v aukcích první a druhé ceny.

Cílem práce je objasnit čtenářům základní pojmy teorie her. Zaměřit se na hry s neúplnou informací a ukázat možnost jejich využití v ekonomické praxi.

1 ZÁKLADNÍ POZNATKY TEORIE HER

Teorie her patří mezi matematické vědy. Pomocí několika modelů analyzuje konfliktní situace a hledá nejvýhodnější řešení pro všechny účastníky, kteří se na základě dostupných informací musí co nejlépe rozhodnout. Zabývá se tedy modelováním a analýzou rozsáhlého souboru konfliktních a rozhodovacích situací. Pod pojmem konfliktní situace si můžeme představit spoustu stavů. Může se jednat o salonní hry, jako je poker nebo šachy, ale také o mnohem důležitější případy, kdy se armády rozhodují v bojových situacích, firmy mezi sebou soupeří o lepší pozici v podnikání, politické strany o své příznivce, či zvířata bojující o kořist a přežití. Takto by se mohlo pokračovat dál a dál.

Teorie her používá pro zachycení konfliktů matematický aparát, který jednoznačně určuje pravidla hry. Při řešení mnoha případů je vhodné matematické znalosti kombinovat se znalostmi z jiných vědních oborů, z nichž je možno jmenovat psychologii či biologii. Nejednoznačné řešení, které často vyžaduje použití simulací, dělá teorii her zajímavým vědním oborem. [1]

V teorii her vystupují vždy minimálně dva účastníci, kdy jeden účastník na základě svého rozhodnutí ovlivňuje reakce okolí a dostává se s ním do konfliktů. Proto se hovoří o rozhodování v konfliktních situacích. Není nutné, aby všichni účastníci byli lidé. Kromě jednoho hráče, kterým musí člověk být, zde mohou vystupovat např. losovací stroj či sama náhoda.

Základní modely většinou řeší konflikty pouze dvou stran nebo velmi malého počtu účastníků. V každém z nich se zohledňuje rozhodování dalších účastníků společně s rozhodnutím prvního hráče a konfliktní situace končí pro každého hráče nějakým důsledkem.

1.1 Možnosti využití teorie her

Teorie her nachází své uplatnění v několika různých oblastech. Patří mezi ně:

- Hry – jedná se o společenské hry, jako je poker, šachy, člověče nezlob se, kámen-nůžky-papír, piškvorky atd. Nepatří sem hry, které člověk hraje sám se sebou nebo loterie.
- Ekonomie – zde je možné řešit pomocí her celou řadu situací. Konfliktní vztahy mezi konkurujícími firmami, v rámci jednoho podniku mezi zaměstnanci či mezi pořízenými a nadřízenými, vztahy mezi odběrateli a dodavateli.

- Matematika – řadu rozhodovacích situací lze za použití stanovených principů řešit jednoduchými matematickými modely. Některé matematické problémy je vhodné pro vyřešení přeměnit např. na určitý druh strategie ve hře. Různé typy her se aplikují v teorii množin nebo v logice.
- Informatika – hry se využívají např. při zkoumání chování komunikačních a síťových protokolů nebo zkoumání korektnosti programů.
- Kybernetika – při modelování chování mezi systémy.
- Politologie – využití při volbách, sestavování koalic.
- Psychologie – řešení mezilidských vztahů.
- Biologie – zkoumání vztahů mezi geny populace, mezi jedinci stejného druhu, mezi kořistí a predátorem, či parazitem a hostitelem.
- Vojenství – slouží pro určení nejvhodnějších strategií k poražení protivníka. [2]

1.2 Předmět teorie her

Předmětem teorie her je pomocí modelů řešit situace, jak správně se rozhodnout, abychom maximalizovali svůj užitek. Jednou z množiny rozhodovacích situací jsou konfliktní rozhodovací situace, které musí splňovat níže uvedené podmínky:

- Rozhodovací situace se účastní minimálně dva hráči.
- Každý hráč zná množinu strategií svého chování, ale i chování protihráče.
- Každý hráč je schopen ohodnotit efektivnost svého rozhodnutí při všech možných strategiích, které volí protihráč.
- Každý hráč vybírá z množiny strategií bez ohledu na to, jak volí protihráči.
- Nejméně jeden účastník rozhodovací situace je inteligentní hráč. [3]

1.3 Historické poznatky

Poznatky uvedené v této kapitole jsou čerpány z knih [1], [4] a z dalších zdrojů uváděných průběžně v textu.

1.3.1 Počátky teorie her

Historicky bylo původním cílem této teorie zlepšení herní strategie společenských her. Odtud je také název odvozen. Již v roce 1713 přišel Angličan James Waldegrave (1684–1741)

na způsob, jak vyhrát v karetní hře *Le Her*. Přestože on tyto poznatky neuměl v žádné jiné situaci využít, nesly již tehdy mnoho prvků moderní teorie her.

Francouzský matematik Augustin Cournot (1801–1877) ve své práci z roku 1838 studoval optimální chování duopolistů a zabýval se otázkou, jak stanovit objem výroby na trhu, kde proti sobě stojí pouze dvě firmy. Jeho model oligopolu se stále uvádí v učebnicích ekonomie.

Základní prvky nynější teorie her se objevovaly v první polovině 20. století v příspěvcích Ernsta Zermela (1871–1953), Émila Borela (1871–1956) a Johna von Neumanna (1903–1957). Borel vydal několik prací, ve kterých spojil problémy karetní hry s reálnými situacemi. Pro hry dvou hráčů se třemi nebo pěti strategiemi jako první formuloval smíšenou strategii s minimax řešením. Definoval pravidla pro jednoduché hry, kde zastával názor, že bez ohledu na hru soupeře je potřeba hrát tak, aby se minimalizovalo riziko prohry. Roku 1928 von Neumann ve svém díle *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* dokázal matematické tvrzení, že každá hra dvou hráčů s nulovým součtem a konečným počtem dominantních strategií je pro jednotlivé hráče přesně vymezena.

1.3.2 Systematický přístup

Do ekonomie a společenských věd se tato vědní disciplína probojovala až v roce 1944 vydáním knihy *Theory of Games and Economic Behavior*. Americký matematik maďarského původu John von Neumann a německý ekonom Oskar Morgenstern (1902–1977) napsali tuto knihu během druhé světové války ve Spojených státech. Dílo obsahující více jak šest set stran textu se stalo jakousi biblí nové vědní disciplíny – teorie her, a ustanovilo teorii her jako novou vědní disciplínu. Autoři zde shrnuli již existující poznatky a poukázali na možnost využití teoreticko-herních modelů v často konfliktních ekonomických a rozhodovacích procesech. Popsali zde situaci, kdy se několik hráčů z důvodu zlepšit svou pozici v konfliktu spojí do koalice.

Během let 1950–1957 vydala Princetonská univerzita čtyři sborníky *Contributions to the Theory of Games*, které obsahují významné práce.

John Forbes Nash (1928–2015) ve své disertační práci zavedl rozlišování mezi kooperativními a nekooperativními hrami. Později při své práci vycházel z poznatků Neumanna a Morgensterna, které zobecnil tak, aby byly použitelné pro reálné situace. V roce 1951 zavedl pojem rovnováhy, která po něm byla pojmenována. Jedná se o stav, kdy při neměnné strategii protihráčů, nemůže hráč změnou své strategie dosáhnout vyššího zisku. Od roku 1949 pracoval ve společnosti RAND zabývající se vývojem nových technologií pro americkou armádu jako

expert na optimální strategie. Začátkem roku 1959 u něj propukla paranoidní schizofrenie a na třicet let se odmlčel. V roce 1994 obdržel za rozdělení kooperativních a nekooperativních her a za formulování Nashovy rovnováhy spolu se Reinhardem Seltenem (1930–2016) a Johnem Charlesem Harsanyim (1920–2000) Nobelovu cenu.

K aplikování teorie her v dalších oborech přispěla učebnice *Introduction to the Theory of Games* (1952) od J.C.C. McKinseyho (1908–1953). Roku 1954 John Davis Williams (1909–1964) publikoval velmi populární knihu o teorii her *The Compleat Strategyst*, která svým obsahem nabízí spíše řešení hříček, neboť končí dříve, než začne být přínosná pro použití v aplikacích. Tato kniha byla vydána také v českém překladu.

V roce 1957 Robert Duncan Luce (1925–2012) a Howard Raiffa (1924–2016) vydali knihu *Games and Decisions*, která byla pro teorii her velmi přínosnou. Zřetelně jsou zde definovány základní principy teorie her včetně poukázání na jejich slabá místa. Sklon považovat teorii her pouze za matematickou disciplínu, kdy není třeba poukazovat na výsledky reálných konfliktů, byl touto prací usměrněn. Díky tomu nezanikla souvislost vývoje matematické teorie s modelováním rozhodovacích situací. Tato kniha byla vydána také v ruském jazyce.

V roce 1965 Rufus Isaacs (1914–1981) ve své knize *Differential Games* poukázal na nové odvětví teorie her, zvané teorie diferenciálních her. Jedná se o rozhodovací situace, kdy strategie hráčů jsou popsány v určitém časovém okamžiku.

V Sovětském svazu se jako první teorií her zabýval Nikolai Nikolaevich Vorobiev (1925–1995). Mezi jeho díla patří sborníky *Matričnyje igrы* a *Beskonečnyje antagonističeskije igrы*, také učebnice teorie her pro ekonomy, která byla přeložena i do anglického jazyka *Teorija igr, lekcii dla ekonomistov-kibernetikov*. Nové poznatky o teorii her je možné najít i v odborných časopisech. Jedním z nich, který vznikl v roce 1971, je *International Journal of Game Theory*.

Také v češtině či slovenštině vyšlo několik publikací. František Turnovec (nar. 1941) a Michal Chobot (nar. 1939) vydali v roce 1967 knihu *Teória hier*. O sedm let později napsal Miroslav Maňas (nar. 1935) dílo *Teorie her a optimální rozhodování*. V roce 1980 vyšla kniha *Modely rozhodovania v konfliktných situáciách a za neurčitosti* od autorů Chobot a Akkula Turnovcová.

Významným rokem byl rok 1994, kdy ekonomové Nash, Selten a Harsanyi obdrželi Nobelovu cenu za analýzu rovnováhy v teorii nekooperativních her. Tuto cenu v roce 2005 obdrželi také Thomas Crombie Schelling (1921–2016) a Robert John Aumann (1930) za využití

teorie her. Objasňují problematiku obchodních a cenových válek a vysvětlují, proč někdo je ve správě svých zdrojů úspěšnější než někdo další.

1.3.3 Hry s neúplnou informací

Základní rozdělení na hry s úplnou a neúplnou informací obsahovala už von Neumannova a Morgensternova kniha [5, s. 30]. Navzdory tomu byla celá teorie až do konce 60. let omezena na studium her s úplnou informací. V letech 1964–1970 byla americkou agenturou U. S. Arms Control and Disarmament Agency (ACDA – Agentura Spojených států pro kontrolu zbraní a odzbrojení) v rámci jednání o omezení zbrojení mezi Spojenými státy a tehdejším Sovětským svazem ustanovena skupina deseti specialistů na teorii her, jejichž úkolem bylo přispět k úspěchu jednání analýzou strategických postojů jednotlivých aktérů. Během práce v této skupině rozpracoval Harsanyi svou teorii her s neúplnou informací, kterou později publikoval ve třídílném článku *Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players* v časopise *Management Science*. [16]

Harsanyi vycházel z představy strategické hry dvou hráčů, z nichž jeden reprezentuje americkou stranu a druhý sovětskou. Aby modeloval nejistotu hráče č. 2 ohledně skutečné povahy hráče č. 1, předpokládal, že existuje K možných typů hráče č. 1, přičemž hráč č. 2 neví, který z těchto typů skutečně reprezentuje druhou stranu. Volba strategie hráče č. 2 přitom silně závisí na typu hráče č. 1. V tomto případě na jeho záměrech, s nimiž vstupuje do jednání, na úrovni jeho vojenských technologií apod. Harsanyi zdůrazňuje, že v podobné situaci se může ocitnout i kterýkoliv aktér soutěže mezi ekonomickými subjekty. [6]

Druhou významnou osobností pro rozvoj teorie her s neúplnou informací byl Aumann, který byl do projektu iniciovaného agenturou ACDA přizván také. Díky řešenému problému se začal společně s Michaelem Maschlerem zabývat opakovanou hrou s neúplnými informacemi.

Životu, studiu a získávání znalostí těchto dvou osobností jsou věnovány další dvě části.

1.3.4 John Charles Harsanyi

Informace o životě tohoto ekonoma jsou získány z internetových zdrojů [7], [8] a [9]. Americký ekonom maďarského původu John Ch. Harsanyi (maďarsky János Károly Harsányi) se narodil 29. května 1920 v Budapešti. Jeho otec byl židovského původu a pracoval jako lékárník. Harsanyi vystudoval prestižní luteránské gymnázium v Budapešti, které před ním navštěvoval např. i John von Neumann. Už v době studií projevoval výrazné nadání pro matematiku, které se chtěl společně s filosofií věnovat i nadále. S ohledem na rostoucí vliv

Hitlera v Německu i Maďarsku se ale rozhodl pro studium farmakologie, aby mohl pracovat v lékárně, a tím získal vojenský odklad.

V roce 1944 Němci obsadili Maďarsko a Harsanyi musel pracovat v jednotce nucených prací. Osvobodil se při deportaci pracovní jednotky z Budapešti do koncentračního tábora v Rakousku, kdy se mu podařilo utéct z nádraží těsně před odjezdem vlaku. Nalezl úkryt v jezuitském klášteře, což mu pravděpodobně zachránilo život.

Po válce v roce 1947 získal na univerzitě v Budapešti doktorát z filozofie a později zde vyučoval sociologii. Na univerzitě se také setkal se svou budoucí ženou Anne. Po nástupu komunistického režimu v Maďarsku musel univerzitu po roce kvůli svým politickým názorům opustit a vrátil se pracovat k otci. Uvědomil si, že neustálý tlak na jeho osobu má jediné východisko, a tím je opustit Maďarsko. Spolu s Anne utekli v roce 1950 přes hranice do Rakouska a po několika měsících emigrovali do Sydney v Austrálii, kde se pár dnů po příjezdu vzali.

Pro špatnou angličtinu a neuznané vzdělání z Maďarska, musel Harsanyi přes den pracovat v továrně, ale večer studoval ekonomii na univerzitě v Sydney. V roce 1953 získal magisterský titul a roku 1954 začal přednášet na univerzitě v Brisbane. V roce 1956 díky stipendiu Rockefellerovy nadace dostal spolu s manželkou možnost studovat na Stanfordské univerzitě v USA, kde získal doktorát v oboru ekonomie. Disertační práci psal pod vedením Kennetha Arrowa. Dal na jeho rady a mnoho času věnoval studiu matematiky a statistiky, které mu později velmi pomohlo při zkoumání teorie her.

V roce 1958 se Harsanyi s manželkou vrátil do Austrálie, kde začal pracovat na univerzitě v Canbeře. Později byl jmenován profesorem ekonomie v Detroitu, a nakonec se usídlil jako profesor na univerzitě v Berkeley, kde pokračoval ve své průlomové práci o teorii her.

Jeho zájem o teorii her vyvolaly příspěvky, které publikoval v letech 1950–53 John Nash, a které byly zaměřeny na kooperativní a nekooperativní hry, na hry dvou hráčů, kdy všichni znají všechno. Harsanyi přemýšlel, jak by to vypadalo v reálnějších situacích, kdy nejsou všechny informace známy. V roce 1967–8 ukázal v třídílném příspěvku [16], systematický postup, jak hru s neúplnými informacemi převést na ekvivalentní hru s úplnými informacemi, která zahrnuje náhodné pohyby.

Vydal celkem čtyři knihy, poslední z nich byla vydaná roku 1988 ve spolupráci s R. Seltenem a jak její název napovídá, jedná se o teorii herní rovnováhy. Kniha se jmenuje *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. V letech 1993–4 napsal dokumenty,

které navrhly novou teorii pro rovnovážnou volbu. První se věnoval hrám s úplnou informací a druhý hrám s neúplnou informací. Jedná se o jednodušší a atraktivnější teorii, než která je uvedena v knize z roku 1988.

V roce 1994 obdržel spolu s J. Nashem a R. Seltenem Nobelovu cenu za ekonomii, za svůj přínos v teorii her, snahu analyzovat konfliktní situace v podnikání i v mezinárodních vztazích a rozhodování v konkurenčních vztazích.

Harsanyi zemřel 9. srpna 2000. Profesor z univerzity v Berkeley John Quigley, jak se v článku [7] píše, o něm řekl: „*Odchod Johna Harsanyiho je velkou ztrátou pro ekonomickou profesi i pro mnoho jeho přátel a kolegů. Harsanyiho práce přispěla k rozvoji ekonomické teorie v nedokonalém světě, ve kterém žijeme. Jeho rozvoj teorie her ukázal, jak rozdíly v informacích dostupných ekonomickým subjektům ovlivňují výsledky trhu a ekonomický blahobyt. Jeho klíčová díla tvoří základ pro všechny moderní analýzy průmyslové organizace a mají skutečný praktický dopad v obchodní a vládní politice*“.

1.3.5 Robert John Aumann

Informace o životě izraelského matematika jsou získány z internetových zdrojů [10] a [11]. Robert J. Aumann se narodil 8. června 1930 ve Frankfurtu nad Mohanem do židovské rodiny. Jeho otec byl obchodník s textilem. V důsledku rychle se zhoršující situace v Německu po nástupu nacistického režimu emigrovala celá rodina v roce 1938 do New Yorku.

V New Yorku navštěvoval spolu s bratrem židovské farní školy a na City College získal bakalářský titul. Při postgraduálním studiu na Massachusetts Institute of Technology (MIT, Massachusettský technický institut) se zabýval algebraickou topologií, konkrétně teorií uzlů. Jeho práci o teorii uzlů využil o padesát let později vnuk při svém studiu o rakovině způsobené vázanou DNA. Po získání doktorátu odešel pracovat na Princetonskou univerzitu do výzkumné skupiny, jejíž činnost byla zaměřena na operační výzkum. Jedním z problémů k řešení byl úkol týkající se obrany města před nálety, kdy pouze některá letadla měla jaderné zbraně a ostatní byly jako návnady. Po zadání tohoto úkolu si vzpomněl na Johna Nashe, se kterým se setkal při vysokoškolském studiu, a na jeho teorii her, která se zdála být jako správný nástroj na vyřešení úkolu. Od té doby se jí začal zabývat.

V roce 1955 se oženil s izraelskou dívkou, přestěhoval se do Jeruzalému a začal pracovat jako člen matematické fakulty na Hebrejské univerzitě, kde působil až do svého důchodu. Spolu s manželkou měl pět dětí, později se radoval z devatenácti vnoučat a dvou pravnoučat. Po smrti

své manželky se v roce 2005, krátce před udělením Nobelovy ceny, oženil s její ovdovělou sestrou.

Dokázal, že lze pomocí nekooperativní teorie her analyzovat dlouhodobou sociální interakci. Ukázal, že mírová spolupráce je v opakované hře často rovnovážným řešením, i když krátkodobě dochází k silným konfliktům. V matematických kruzích se stal známý pro svůj přínos v oblasti opakovaných her. Definoval koncept korelované rovnováhy, která je pružnější než klasická Nashova rovnováha.

V roce 2005 obdržel spolu s Thomasem Schellingem Nobelovu cenu za ekonomiku za lepší porozumění konfliktům a spolupráci s využitím teorie her.

2 CHARAKTERISTIKA TEORIE HER

Podstatou této kapitoly je vysvětlení pojmů používaných v teorii her, poskytnutí informací o klasifikaci her z různých hledisek a vysvětlení matematických modelů, které se k popisu rozhodovacích situací používají. Před tím, než budou objasněny jednotlivé hry, je vysvětlen pojem Nashova rovnováha, který je stěžejní pro celou teorii her.

2.1 Základní pojmy teorie her

Na svém počátku se teorie her zabývala pouze společenskými hry, a proto se základní pojmy teorie her odlišují od ekonomického názvosloví. Je třeba si jejich význam vysvětlit dříve, než bude objasněn princip teorie her. Výklad pojmů je převzat z knih [1], [3], [4] a [12]

- Hra – nejedná se pouze o společenské hry, ale jde o jakoukoli konfliktní rozhodovací situaci minimálně mezi dvěma hráči. Mohou to být jedinci, firmy, politické strany, armáda, biologické druhy. Dále to je soubor pravidel a podmínek, které určují možnosti, z nichž mohou hráči volit, v jakém sledu je volí a jaká je jejich výhra v závislosti na jejich zvolené alternativě. Všichni musí tyto pravidla znát a dodržovat je. Také to znamená matematický model rozhodovací situace. Určité rozhodovací situace lze po zjednodušení a za jistých podmínek řešit společnými principy jednoduchých matematických modelů, aniž bychom rozlišovali, jaké oblasti se konflikt týká.
- Hráč – účastník konfliktní rozhodovací situace, rozhodovatel. Podle chování hráčů je dělíme na inteligentní (racionální, uvědomělé) a neinteligentní (neuvědomělé), kterými může být náhoda či náhodný mechanismus.
- Strategie – rozhodnutí hráče. Možnost, kterou si hráč zvolil ze svého prostoru alternativ.
- Prostor strategií – množina všech možných, hráči dostupných alternativ.
- Optimální strategie – hráčem zvolená alternativa, která je pro něj nejvýhodnější. Přináší mu nejvyšší možnou hodnotu výplatní funkce.
- Dominovaná strategie – strategie, která bez ohledu na to, co udělá protihráč, přináší hráči vždy nižší užitek, než kdyby zvolil jinou strategii. Tuto strategii nikdy nepoužije a může ji ze hry vyloučit.
- Dominující strategie – strategie, která hráči přináší ve všech situacích nejlepší užitek. Nemá důvod volit jinou strategii.
- Ryzí strategie – znamená, že hráč vybírá strategii se 100% pravděpodobností. Neexistuje zde náhoda, která by mohla hráče ovlivnit.

- Smíšená strategie – dává hráči radu, s jakou pravděpodobností má vybrat ze svých jednotlivých ryzích strategií. Zde je výhra náhodnou veličinou.
- Výplatní funkce – výsledek hry určující užitek, výhru, zisk hráče v závislosti na zvolených strategiích. Nezávisí pouze na rozhodnutí daného hráče, ale záleží i na rozhodnutí protihráčů. Proto musí určit výhru pro všechny možné kombinace rozhodnutí všech účastníků.
- Inteligentní hráč – hráč, který na základě dostupných informací o hře svým logickým uvažováním maximalizuje užitek, výhru. Při své volbě vždy bere v úvahu všechna možná rozhodnutí svých protihráčů
- Neinteligentní hráč – náhodný mechanismus, náhoda. Rozhoduje se zcela náhodně bez ohledu na výši jeho zisku. Pokud je ve hře více neinteligentních hráčů, lze je sloučit do jednoho.
- Rovnováha – kombinace strategií jednotlivých hráčů, kdy jsou s výplatou všichni spokojeni a nemají důvod svou volbu měnit.

Mezi úplně nejzákladnější pojmy patří z výše uvedených čtyři, které svou podobou ovlivňují typ hry a způsob jejího řešení. Jsou to hra, hráč, strategie a výplata.

2.2 Klasifikace her

Teorie her byla během svého vývoje rozdělena do několika odvětví, které se těžko vymezují. Co autor, to jiné dělení. Všeobecně přijaté a známé jsou názvy jako maticové hry, diferenciální hry či kooperativní hry.

2.2.1 Klasifikace podle verze z roku 1986

Teorie her se podle verze třídění z roku 1986, která se využívá v mezinárodních referativních časopisech, jako např. *Mathematical Reviews*, dělí tak, jak uvádí Mañas v knize [4, s. 14]:

1. Hry dvou hráčů.
2. Hry N hráčů nekooperativní.
3. Hry N hráčů kooperativní.
4. Nekonečné hry.
5. Víceetapové hry stochastické.
6. Víceetapové hry rekurzivní.
7. Diferenciální hry.

8. Herní modely pronásledování a úniku.
9. Teorie užitku.
10. Teorie rozhodování.
11. Teoreticko-herní modely.
12. Poziční hry.
13. Aplikace teorie her.

Toto členění není podle žádného logického hlediska, takže slouží především pro knihovnické účely.

2.2.2 Klasifikace v moderním pojetí

Nejčastěji se využívá klasifikace, kterou např. uvádí Martin Chvoj ve své knize *Pokročilá teorie ve světě kolem nás* [12]:

- **Kooperativní a nekooperativní.**

Kooperativní – mezi hráči existuje možnost určité dohody.

Nekooperativní – dohoda mezi hráči není možná.

- **Jednokolové a vícekolové.**

Jednokolové – hráči odehrají pouze jednu hru, na jejímž konci si rozdělí výplaty. Žádná další kola již nejsou a tomuto faktu hráč podřizuje i volbu své strategie.

Vícekolové – hra má více kol a v každém novém kole může hráč použít jinou strategii.

- **Symetrické a asymetrické.**

Symetrické hry – hráči volí ze stejné množiny strategií, někteří autoři navíc uvádějí, že jsou stejné i výplatní funkce.

Asymetrické hry – hráči nevolí ze stejné skupiny strategií a ani jejich výplatní funkce nejsou stejné. Jejich postavení je nerovnoměrné.

- **Hry s nulovým součtem a hry s nenulovým součtem.**

U her s nulovým součtem je součet výplat všech hráčů roven nule.

- **Hry s úplnou informací a neúplnou informací.**

Hry s úplnou informací – všichni hráči mají kompletní informace o hře před jejím začátkem.

Hry s neúplnou informací – některý z hráčů nemá před začátkem hry kompletní informace.

- **Nekonečně dlouhé hry.**

Jedná se o nekonečně dlouhé hry, které mají význam spíše teoretický.

- **Konečné, diskrétní a spojité hry.**

Konečné – množina strategií hráčů je konečná.

Diskrétní – množina navíc může být i nekonečná spočetná.

Spojité – množina strategií je nespočetná.

- **Simultánní hry a metahry.**

Simultánní hry – všichni hráči volí své strategie současně, tudíž neznají chování protihráčů.

Metahry – někdy nazývané jako hry sekvenční. Hráči hrají postupně, takže mohou pozorovat, jaké strategie volí protihráči. [12]

2.3 Dělení her podle charakteristik

Rozhodovací situace můžeme dělit podle několika charakteristik. Níže uvedená kritéria vhodná pro rozdělení rozhodovacích situací do tříd: [4]

- počet účastníků,
- účast či neúčast náhodných mechanismů,
- míra dostupných informací v okamžiku rozhodování,
- počet možných strategií,
- způsob rozdělování výher.

2.3.1 Podle počtu účastníků

Počet účastníků je základním kritériem členění her. Jak již bylo uvedeno, minimálně musí být dva, maximální počet hráčů není nijak omezen.

Dělíme je na hry:

- s jedním hráčem,
- se dvěma hráči,
- s n hráči,
- s nekonečným počtem hráčů.

Hry s jedním hráčem se nazývají hry nekonfliktní. Pro zjednodušení budeme ve většině herních situací předpokládat pouze dva hráče. Tyto hry jsou nejjednodušší. Modelování her, kde je více hráčů je podstatně složitější. Proto pro příliš velký počet hráčů je mnohdy lepší uvažovat o modelování her, ve kterých vystupuje nekonečně mnoho hráčů.

2.3.2 Podle přítomnosti náhodných jevů

Jestliže jsou v rozhodování alespoň dva inteligentní hráči, jedná se o konflikt. Pokud ve hře vystupují jeden inteligentní a jeden neinteligentní hráč, jedná se o rozhodování za rizika nebo za nejistoty.

- Rozhodování při riziku – inteligentní hráč zná pravděpodobnosti tahů náhodného mechanismu.
- Rozhodování při nejistotě – inteligentní hráč nezná pravděpodobnosti tahů náhodného mechanismu.

2.3.3 Podle dostupných informací

Na základě informací, které mají hráči k dispozici, dělíme hry na:

- Hry s úplnou informací – kdy hráči mají před svým tahem přesné informace o postupném dění ve hře.
- Hry s neúplnou informací – kdy míra informací každého hráče je pouze částečná.

2.3.4 Podle počtu možných strategií

Podle toho, zda hráči mají konečně či nekonečně mnoho možností, jak volit, rozlišujeme hry na:

- Konečné hry – všichni hráči mají konečný počet strategií.
- Nekonečné hry – všichni hráči mají nekonečně mnoho strategií.

Před sestavením modelu musí hráč zvážit, zda volit řešení pomocí konečné či nekonečné hry. Přestože mají reálné situace vždy konečný počet strategií, nastávají situace, že je mnohem výhodnější volit hru nekonečnou. Jedná se o případy, které obsahují tisíce i desetitisíce alternativ.

2.3.5 Podle způsobu rozdělení výher

Podle rozdělení výher mezi hráče se odlišují na:

- Hry s konstantním součtem – kdy bez ohledu na zvolené strategie je součet výher všech hráčů roven konstantě a pokud je tato konstanta rovna nule, jedná se o hry s nulovým součtem. Těmto hrám se říká antagonistické.
- Hry s nekonstantním součtem – kdy se objem výher odvíjí od zvolených strategií. Těmto hrám se říká neantagonistické.

2.4 Matematické modely k popisu rozhodovacích situací

Pro dosažení požadovaného cíle je třeba správného rozhodnutí. Rozhodovací situace nabízející několik různých variant řešení jsou mnohdy velmi složité a nepřehledné. Aby rozhodovatel zvolil správnou cestu k maximalizaci svého zisku, je třeba rozhodovací situaci popsat matematickým modelem. Tato kapitola včetně podkapitol je sepsána na základě knih [1], [4], [12].

Rozlišujeme tři základní modely:

- hra v normálním tvaru,
- hra ve tvaru charakteristické funkce,
- hra v explicitním tvaru.

2.4.1 Hra v normálním tvaru

Tato hra také bývá nazývána jako strategická hra nebo hra ve strategickém tvaru. Jedná se o nejjednodušší model pro popis reálné situace. Všichni hráči se rozhodují současně a nezávisle na sobě.

Hra v normálním tvaru je určena:

- Množinou hráčů $Q = \{1, 2, \dots, N\}$ – všichni účastníci konfliktní situace, na jejichž rozhodnutí a chování závisí výsledek dané hry.
- Množinou prostorů strategií $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ – soubor všech možných rozhodnutí každého hráče. Množina strategií X_i značí prostor strategií i -tého hráče. Prvek $x_i \in X_i$ označuje strategii i -tého hráče. N -tice $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ je tvořena souborem strategií zvolených jednotlivými hráči. V případě hry dvou hráčů se obvykle užívá X pro prostor strategií hráče 1 a Y pro prostor strategií hráče 2. Jednotlivé strategie se značí x pro hráče 1 a y pro hráče 2.

- Množinou výplatních funkcí neboli výher $\{f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), f_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, f_N(x_1, x_2, \dots, x_N)\}$ – výplatní funkce jsou definovány na kartézském součinu prostoru strategií, protože musí stanovit výhru pro všechny přípustné kombinace alternativ. Ve hře dvou hráčů se obvykle využívá značení $f_1(x, y)$ pro hráče 1 a $f_2(x, y)$ pro hráče 2. Kladná hodnota výplatní funkce určuje hráčův zisk, záporná hodnota pak jeho ztrátu.

Hru v normálním tvaru lze zapsat jako

$$\{Q; X_1, X_2, \dots, X_N; f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)\}$$

2.4.2 Hra ve tvaru charakteristické funkce

Tento model se využívá v případě, kdy se hráči pro posílení svých pozic mohou spojit do skupin, koalic. Koaliční skupina K je potom podmnožinou množiny Q všech hráčů, tzn. $K \subset Q$. Pokud je např. $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tak K může být třeba $\{2, 4, 5\}$ nebo $\{1, 4\}$ atd.

2.4.3 Hra v explicitním tvaru

Matematický model „hra v explicitním tvaru“ se využívá v případě, pokud rozhodování probíhá postupným realizováním tahů. Někdy je nazývána jako hra v rozvinutém tvaru nebo tahová hra. Cílem hráčů je dosáhnout co možná nejlepších výsledků. Rozhodovací situace je znázorněna pomocí grafu, který se nazývá strom. Je tvořen uzly, které jsou spojeny pomocí hran. Všechny prvky stromu jsou pro přehlednost popsány. Každý uzel znázorňuje možný stav hry a je k němu přiřazen hráč, který je právě na tahu. Hrany určují akce hráčů. Podle počtu možných tahů daného hráče vychází z uzlu počet hran. Po zvolení jedné alternativy se po hraně postupuje do nového uzlu a ve hře pokračuje další hráč. Situace se opakuje až do okamžiku ukončení hry, tj. stav, kdy z uzlu již nevychází žádná hrana a tento uzel je koncový. Celý postup od kořene stromu, který je dán počátečním uzlem, až po koncový uzel ukazuje průběh hry, zvolenou strategii hráčů. Jestliže je rozhodnuto o výsledku, je třeba stanovit preference účastníků mezi koncovými uzly.

2.5 Nashova rovnováha

Nashova rovnováha je základním konceptem rovnováhy pro většinu her. Rovnovážná strategie se nazývá Nashova, protože podle Nashovy věty, kterou uvádí Martin Chvoj ve své knize [12] existuje v každé konečné hře smíšená rovnovážná strategie.

Věta 1 (Nashova věta): Ve smíšených strategiích má každá konečná hra aspoň jeden rovnovážný bod.

Definice 1: Mějme hru o N hráčích, kde X_i je prostor strategií hráče i a $f_i(x_i, \dots, x_N)$ je výplata hráče i . Nashovo rovnovážné řešení je takový profil strategií $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N\}$, kde každá strategie $\bar{x}_i$ z prostoru strategií X_i maximalizuje hodnotu funkce $f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_N)$. Platí:

$$f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_N) \leq f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N). \quad (2.1)$$

Rovnovážná strategie každého hráče je tedy nejlepší možnou odpovědí na jeho předpoklad, že ostatní hráči také použijí rovnovážné strategie. [12]

Optimální strategie ve hře dvou hráčů v normálním tvaru vyjadřuje definice 2.

Definice 2: Strategie $\bar{x}$, $\bar{y}$ s vlastností

$$f_1(x, \bar{y}) \leq f_1(\bar{x}, \bar{y}) \text{ a } f_2(\bar{x}, y) \leq f_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad (2.2)$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$ se nazývají Nashovy rovnovážné strategie. Pro hry s nulovým součtem, kde platí $f_1(x, y) = f(x, y)$ a $f_2(x, y) = -f(x, y)$ je možné nerovnosti zapsat ve tvaru

$$f(x, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, y). \quad (2.3)$$

Číslo $f(\bar{x}, \bar{y})$ se nazývá cena hry.

Nashovo rovnovážné řešení vyjadřuje takovou strategii, že pokud jeden z účastníků změní své chování, jeho zisk se buď sníží nebo zůstane stejný, ale nemůže si polepšit. To platí za předpokladu, že protihráči volí své rovnovážné strategie. [1]

2.6 Statické hry s úplnou informací

Statická hra je taková, kdy hráči nemají žádné informace o tahu protihráče, nezávisle na tom, zda hrají současně nebo ne. Zajímá je pouze důsledek jejich rozhodnutí. Jako příklad, kdy hráči hrají v jednom okamžiku, můžeme uvést pro všechny známou hru „kámen-nůžky-papír“. Oba účastníci hry volí současně ze tří možností a na základě jejich rozhodnutí je určen vítěz. Druhým

případem je situace, kdy se hráči rozhodují jeden po druhém, ale druhý hráč neví, jak volil první. Teprve po jeho volbě oba zjistí, jak hrál soupeř.

2.7 Dynamické hry s úplnou informací

V dynamické hře mohou hráči sledovat tahy protihráčů a podle nich rozhodovat o svém chování. Každý hráč provádí několik tahů v předem stanoveném pořadí. Strategií jsou tahy, které je potřeba použít v každé herní situaci.

Jedním způsobem řešení dynamické hry je použití Nashovy rovnovážné strategie stejně jako u statické hry. To platí pouze tehdy, pokud se jedná o hru dvou hráčů a lze určit všechny jejich možné strategie. V tomto případě je možné hru převést na hru v normálním tvaru a zapsat ji pomocí matice.

Druhým způsobem je řešení pomocí zpětné indukce. Herní situaci v explicitním tvaru znázorníme pomocí grafu typu strom. Indukce se nazývá zpětná proto, že řešení začíná od koncových uzlů. Ty představují situace na konci hry, kdy jsou hráčům rozděleny výhry. Postupuje se směrem nahoru. Pokud z některého uzlu vedou spojnice do více koncových uzlů, vybere se spojnice vedoucí ke koncovému uzlu, který zajistí hráči na tahu nejvyšší výhru. Zbývající spojnice z tohoto uzlu je možné spolu s ostatními uzly, které leží pod nimi, odstranit ze hry. Pokračování probíhá tak dlouho, až se dosáhne kořene stromu, který značí výchozí situaci. Cesta od kořene stromu po koncový uzel přinášející výhru znázorňuje rovnovážný profil strategií.

Tyto obě řešení se týkají dynamických her s dokonalou informací, kdy hráči znají všechny učiněné tahy. Konečné tahové hry s dokonalou informací mají vždy řešení v ryzích strategiích.

2.8 Antagonistické hry

Jedná se o situace, kde proti sobě hrají dva inteligentní hráči a každý z nich se snaží maximalizovat svoji výhru. Po ukončení hry si rozdělí celkovou částku tak, že jeden z hráčů získá to, co druhý ztratí. Součet výplatních funkcí je roven konstantě. Matematickým modelem antagonistického konfliktu je hra v normálním tvaru s konstantním součtem. Teoretické poznatky antagonistických her jsou sepsány podle knih [4], [12].

2.8.1 Hry s konstantním součtem

Součet výher všech hráčů je zde předem dán a hráči ji volbou své strategie nemohou ovlivnit. Oba hráči se snaží maximalizovat svou výhru a zároveň minimalizovat ztrátu. Co jeden hráč získá, druhý ztratí.

Tuto hru pro dva hráče můžeme vyjádřit jako

$$\{Q = \{1, 2\}; X, Y; f_1(x, y); f_2(x, y)\},$$

kde pro všechna $(x, y) \in X \times Y$ platí, že

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = c. \quad (2.4)$$

Symbol c vyjadřuje konstantu, která udává součet výher hráčů.

Rovnovážnou nebo též optimální strategii, kdy si ani jeden hráč nemůže změnou této strategie polepšit, lze vyjádřit definicí:

Definice 3: Strategie $\bar{x} \in X, \bar{y} \in Y$ nazveme ve hře v normálním tvaru rovnovážné, jestliže platí

$$f_1(x, \bar{y}) \leq f_1(\bar{x}, \bar{y}), \quad f_2(\bar{x}, y) \leq f_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad (2.5)$$

současně pro všechna $x \in X, y \in Y$.

Speciálním případem hry s konstantním součtem je hra s nulovým součtem. Každou hru s konstantním součtem lze na tuto hru s nulovým součtem snadno převést. Rovnici (2.4)

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = c$$

můžeme upravit

$$f_1(x, y) - \frac{c}{2} + f_2(x, y) - \frac{c}{2} = 0$$

$$f'_1(x, y) + f'_2(x, y) = 0$$

$$f'_1(x, y) = f_1(x, y) - \frac{c}{2}$$

$$f'_2(x, y) = f_2(x, y) - \frac{c}{2}$$

Hra s nulovým součtem s výplatními funkcemi $f'_1(x, y)$ a $f'_2(x, y)$ je strategicky ekvivalentní se hrou s konstantním součtem s výplatními funkcemi $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$. Pro strategicky totožné hry platí, že mají stejné optimální strategie, což je u her s konstantním součtem splněno, protože hráči maximalizují rozdíl mezi svou výhrou a výhrou protihráče. Tento rozdíl se odečtením konstanty $\frac{c}{2}$ od menšence i menšitele nezmění.

Pro názorné vysvětlení je zde uveden příklad.

Příklad 1:

V matici jsou zapsány dvojice čísel, kde levé číslo vyjadřuje výplatní funkci hráče 1 a pravé výplatní funkci hráče 2.

$$\begin{pmatrix} 5, 3 & -1, 9 & 8, 0 \\ -4, 12 & 10, -2 & 15, -7 \\ 1, 7 & 4, 4 & -3, 11 \end{pmatrix}$$

Sečtením jednotlivých dvojic zjistíme, že součet c je roven 8. Když od každého čísla odečteme konstantu $\frac{c}{2}$, což se rovná 4, dostaneme hodnoty zapsané v matici níže.

$$\begin{pmatrix} 1, -1 & -5, 5 & 4, -4 \\ -8, 8 & 6, -6 & 11, -11 \\ -3, 3 & 0, 0 & -7, 7 \end{pmatrix}$$

Nyní se již jedná o hru s nulovým součtem.

2.8.2 Hry s nulovým součtem

Jde o situaci, kdy výhra jednoho hráče znamená prohru protihráče. Součet výplatních funkcí všech hráčů je roven nule.

Zde pro všechna $(x, y) \in X \times Y$ platí, že $f_1(x, y) + f_2(x, y) = 0$. Z toho vyplývá, že

$$f_1(x, y) = -f_2(x, y). \quad (2.6)$$

U hry s nulovým součtem stačí sledovat pouze jednu výplatní funkci, protože obě se liší pouze znaménkem. Tuto hru pro dva hráče můžeme vyjádřit jako

$$\{Q = \{1, 2\}; X, Y; f(x, y)\}.$$

Definice 4: U hry s nulovým součtem nazveme strategie $\bar{x} \in X, \bar{y} \in Y$ rovnovážné, jestliže platí

$$f(x, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, y) \quad (2.7)$$

současně pro všechna $x \in X, y \in Y$.

Číslo $f(\bar{x}, \bar{y})$ představuje částku, kterou získá hráč 1 za předpokladu, že se oba hráči řídí optimální strategií, a nazývá se cena hry.

Konečné hry dvou hráčů s nulovým součtem lze řešit pomocí maticových her.

2.9 Maticové hry

Tyto hry jsou určeny maticí typu $m \times n$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Hráč 2} & & \\ & & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \text{Hráč 1} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & & \end{array} \quad (2.8)$$

Strategie hráče 1 jsou zaznamenány v řádcích matice, sloupce odpovídají strategiím hráče 2 a prvky matice vypovídají o hodnotách výplatní funkce hráče 1.

Hráč 1 zvolí v každé své strategii x_i prvek s nejnižší hodnotou, který udává minimální zaručenou výhru. Ze zvolených prvků vybere ten maximální, a tím si zajistí nejvyšší zaručenou výhru. Obdobný princip použije také hráč 2, který ale volí v každém sloupci prvek s nejvyšší hodnotou, který zajišťuje maximální zaručenou prohru. Z nich poté vybere prvek s nejnižší hodnotou, který udává nejnižší prohru.

Rovnováha vyjádřena vztahem

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{x_i} \min_{y_j} f_1(x_i, y_j) = \min_{y_j} \max_{x_i} f_1(x_i, y_j) \quad (2.9)$$

vyjadřuje princip maticové hry. Tím je tedy najít prvek, který je minimem v řádku a současně maximem ve sloupci. Nalezený bod se nazývá sedlový prvek matice, je výsledkem Nashovy rovnovážné strategie a udává cenu hry.

Pro představu je níže uvedena matice s označeným sedlovým bodem.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 8 & 5 \\ -9 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Zde je pro hráče 1 optimální strategií první řádek a pro hráče 2 optimální strategií první sloupec. Pokud některý z nich zvolí strategii jinou, nemůže si určitě polepšit. Cena hry je rovna číslu 3.

Pokud se v matici podaří najít sedlový prvek, má hra optimální strategii. Určíme ji podle řádku a sloupce, v nichž se sedlový prvek nachází. Existují ovšem i hry, kde tento prvek není, nebo je sedlových prvků více než jeden. Poté lze říci, že hra nemá řešení v ryzích strategiích. Podle Nashovy věty je ale řešitelná ve strategiích smíšených.

Věta 2: Rovnovážné řešení má ve smíšených strategiích každá maticová hra.

Pro smíšené rozšíření původní maticové hry se strategickými prostory X, Y platí níže uvedená definice.

Definice 5: Mějme maticovou hru s prostory strategií X, Y , která nemá rovnovážné řešení v ryzích strategiích. Smíšené rozšíření původní maticové hry má prostory strategií X^s, Y^s

$$X^s = \left\{ x; x^T = [x_1, x_2, \dots, x_m], \sum_{i=1}^m x_i = 1, x \geq 0 \right\}, \quad (2.10)$$

$$Y^s = \left\{ y; y^T = [y_1, y_2, \dots, y_n], \sum_{j=1}^n y_j = 1, y \geq 0 \right\}, \quad (2.11)$$

a výplatní funkce má tvar

$$f^s(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = x^T A y. \quad (2.12)$$

Smíšenou strategii hráče 1 udává vektor x^T a hráče 2 vektor y^T , jejichž i -tá složka značí pravděpodobnost volby ryzí i -té strategie původní maticové hry. [4]

2.10 Neantagonistické hry

S tímto typem hry se v reálném životě setkáváme nejčastěji. Neantagonistický konflikt je takový případ, kdy každý z účastníků hájí své vlastní zájmy, které ale nejsou v přímém protikladu. To znamená, že výhra jednoho hráče nemusí být prohrou hráče druhého. Celková částka, která se rozděluje na výplaty hráčů, se na rozdíl od antagonistických her odvíjí od zvolených strategií. Jedná se o hry s nekonstantním součtem. Kapitola neantagonistických her vychází z knih [1], [3], [4], [12].

2.10.1 Hry s nekonstantním součtem

Tyto hry dále dělíme na kooperativní a nekooperativní. Zde se již nepoužívá jednotný název cena hry, ale používá se cena hry pro hráče 1 a cena hry pro hráče 2. Označují se $f_1(\bar{x}, \bar{y})$ a $f_2(\bar{x}, \bar{y})$. Nejvhodnějším modelem je rozhodovací situace dvou inteligentních hráčů s nekonstantním součtem. Matematickým modelem pro konečné neantagonistické hry je hra dvoumaticová.

Je tvořena maticí A pro prvního hráče a maticí B pro druhého hráče. Matice A znázorňuje výplaty hráče 1 a matice B výplaty hráče 2.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Pro lepší přehlednost se obě matice spojují do jedné bimatice, kde prvky a_{ij} v řádcích jsou určeny akcemi hráče 1 a prvky b_{ij} ve sloupcích jsou určeny akcemi hráče 2.

$$\begin{pmatrix} a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} & \dots & a_{1n}, b_{1n} \\ a_{21}, b_{21} & a_{22}, b_{22} & \dots & a_{2n}, b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, b_{m1} & a_{m2}, b_{m2} & \dots & a_{mn}, b_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Prvky matice tvoří opět dvojice čísel určující výhry hráče 1 a hráče 2. Nashovy rovnovážné strategie hledáme takovým způsobem, že levé číslo musí být maximem ve sloupci a pravé číslo maximem v řádku. Pokud taková dvojice existuje, jedná se o sedlový prvek, a pokud je pouze jeden, znamená to, jak už bylo řečeno u her s konstantním číslem, že existuje řešení v ryzích strategiích.

2.10.2 Kooperativní hry

U kooperativní hry se mezi hráči předpokládá spolupráce, hráči se sjednotí do koalic, v nichž se mohou dohodnout, jak budou hrát, jakou strategii zvolí, zda a jakým způsobem si rozdělí výplaty jednotlivých hráčů. Hráči mají před volbou strategií možnost uzavírat smlouvu o tom, jakou volbu učiní. Jestli mezi sebou smlouvu uzavřou záleží především na tom, jak je pro oba výhodná. Očekává se, že její uzavření bude oběma účastníkům přinášet vyšší výhry, než kdyby smlouvu neuzavřeli. Po ukončení hry je možné výhru rozdělit dvěma způsoby.

- Výhra je nepřenositelná – nastává v situaci, kdy není domluveno sdílení výsledků dohody. Zisky hráčů jsou dány pravidly hry a soupeři se mohou dohodnout pouze na strategii hry. Výše výplaty každého hráče je dána jeho maticí výher. Otázkou řešení je zjistit, kdy je výhodné dohodu uzavřít a jaké strategie zvolit.
- Výhra je přenosná – hráči se mohou dohodnout, jak si své výhry rozdělí. Např. hráč, který dosáhl lepšího výsledku, předá jako náhradu za svou zvýhodněnou pozici část výhry protihráči. Otázkou řešení zůstává, jaké strategie hráči zvolí dohodou mezi sebou a jakým způsobem si rozdělí své výhry, aby byly oba spokojeni.

2.10.3 Nekooperativní hry

Hráči nemají možnost předem uzavírat smlouvu o volbě strategie. Nemohou se zde tvořit koalice a ani jiná spolupráce mezi soupeři. Stejně jako u antagonistické hry zde platí, že pokud se hráč nedrží optimální strategie, nezíská maximální možnou výhru, zde navíc může dojít i k poškození soupeře, který se od své optimální strategie neodklonil. Neplatí zde pravidlo, že výherce si polepšil o stejnou částku, o kterou protihráč přišel. Za optimální strategii se považuje Nashova rovnováha.

U nekooperativních her můžeme využít Nashovo rovnovážné řešení, kdy rovnovážnými strategiemi nazveme dvojici strategií $\bar{x}$ a $\bar{y}$, pokud platí

$$f_1(x, \bar{y}) \leq f_1(\bar{x}, \bar{y}), \quad f_2(\bar{x}, y) \leq f_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad (2.15)$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$, kde f_1 a f_2 jsou výplatní funkce.

Pokud strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ tvoří rovnovážný bod, potom pro $a_{ij} = f_1(\bar{x}, \bar{y})$ a $b_{ij} = f_2(\bar{x}, \bar{y})$ platí:

- a_{ij} je největší prvek ve sloupci j matice A , tzn. $a_{ij} = \max_{1 \leq k \leq m} a_{kj}$,
- b_{ij} je největší prvek v řádku i matice B , tzn. $b_{ij} = \max_{1 \leq l \leq n} b_{il}$.

K rovnovážnému řešení se dospěje tak, že v matici A označíme všechna maxima v jednotlivých sloupcích a v matici B všechna maxima řádková. Pokud je označena některá dvojice prvků v bimatrici oběma hráči, jedná se právě o hledané rovnovážné řešení.

Při řešení mohou nastat různé situace:

- Nashovo rovnovážné řešení je v ryzech strategiích jediné. Oba hráči našli svou optimální strategii, která je dána dvojicí čísel, kdy obě čísla v této dvojici jsou označena. Pokud některý z nich zvolí jinou strategii, nemůže si v žádném případě polepšit. V matici níže je uveden příklad, kdy je nalezeno jediné optimální řešení v ryzech strategiích.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5, 7} & \mathbf{1, -3} \\ -2, 0 & -1, \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- Hra má více rovnovážných řešení, ale pouze jedno z nich dominuje ostatním. Právě toto řešení, které je pro oba hráče výhodnější, se stává tím zvoleným. V matici níže je situace, kdy jsou dvě rovnovážná řešení. V průsečíku prvního řádku s prvním sloupcem a druhého řádku s druhým sloupcem. Výhodnější strategií pro oba hráče je volba prvního řádku a prvního sloupce.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{6, 9} & 2, 3 \\ 1, 0 & \mathbf{4, 7} \end{pmatrix}$$

Dvojice bodů 6,9 se stává dominující dvojicí rovnovážných strategií.

- Hra má více rovnovážných řešení a zároveň z nich je i více dominujících. Jelikož se hráči nemohou mezi sebou dohodnout, jakou strategii zvolí, mohlo by se stát, že zvolí

úplně tu nejhorší. Řešením matice níže dostáváme tři rovnovážná řešení, z nichž dvě jsou dominující. Pokud by oba zvolili strategii prvního řádku s třetím sloupцем nebo třetího řádku s prvním sloupцем, bylo by vše v pořádku, a hráči by maximalizovali svůj zisk. Protože se na tom ale nemohou domluvit, může se stát, že hráč 1 zvolí první řádek, ale hráč dva první sloupec. Výsledkem by byla strategie pro oba značně nevýhodná.

$$\begin{pmatrix} -4, -2 & -1, 0 & \mathbf{9, 7} \\ -2, -1 & \mathbf{2, 2} & 0, -2 \\ \mathbf{9, 7} & -1, -2 & -5, -4 \end{pmatrix}$$

Pro tento případ se zavádí záměnná soustava dvojic rovnovážných strategií.

Definice 6: Mějme libovolnou množinu indexů I a dvojice rovnovážných strategií hry v normálním tvaru $x_i, y_i, i \in I$. Tuto soustavu dvojic rovnovážných strategií nazveme záměnnou, jestliže se výplatní funkce $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$ nezmění, pokud za x dosadíme libovolné $x_j, j \in I$, a za y libovolné $y_k, k \in I$.

- Hra má opět více řešení, ale neexistuje takové, které by bylo nejvýhodnější pro oba hráče současně. V příkladu níže by hráč 1 volil strategii druhý řádek-druhý sloupec a hráč 2 strategii první řádek-první sloupec. Pokud by oba trvali na svém rozhodnutí, konečnou volbou by byla strategie druhý řádek-první sloupec, ta je ovšem pro oba značně nevýhodná. Situaci by museli vyřešit vzájemnou dohodou, která ale není v nekooperativních hrách možná. Z technicko-herního pohledu není tato situace řešitelná.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3, 9} & -3, 2 \\ \mathbf{2, -1} & \mathbf{8, 4} \end{pmatrix}$$

- Hra nemá v ryzích strategiích žádné rovnovážné řešení. V matici níže neexistuje dvojčíslo, které by bylo celé označené.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2, 3} & -4, \mathbf{5} \\ -1, \mathbf{4} & \mathbf{2, 2} \end{pmatrix}$$

V této situaci se použije smíšené rozšíření dvoumaticové hry, protože zde se vždy najde alespoň jedno rovnovážné řešení.

Definice 7: Hra dvou hráčů s prostory strategií

$$X^s = \left\{ x; x^T = [x_1, x_2, \dots, x_m], \sum_{i=1}^m x_i = 1, x \geq 0 \right\}, \quad (2.16)$$

$$Y^s = \left\{ y; y^T = [y_1, y_2, \dots, y_n], \sum_{j=1}^n y_j = 1, y \geq 0 \right\}, \quad (2.17)$$

a s výplatními funkcemi

$$f_1^s(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = x^T A y, \quad (2.18)$$

$$f_2^s(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i b_{ij} y_j = x^T B y \quad (2.19)$$

se nazývá smíšené rozšíření dvojmaticové hry, určené původní dvojmaticí.

2.10.4 Věžňovo dilema

Jako nejznámější nekooperativní hru je možné uvést „Věžňovo dilema“. Jde o situaci, kdy jsou dva vězni obviněni z trestného činu, a vyslýcháni odděleně. Oběma je doporučeno, aby se ke svému činu přiznali. Oba mají stejné vyhlídky na výsledek soudního řízení. Pokud se oba přiznají, dostanou pět let vězení, pokud se ani jeden nepřizná, soud jim vyměří tři roky vězení. Pokud se ale jeden přizná a udá druhého, tak vězeň, který se přiznal, dostane pouze rok a udaný vězeň si odsedí deset let. Vězni se mezi sebou nemohou domluvit, a proto vzniká dilema, jak se mají zachovat. Ideální by pro ně bylo, aby oba zapírali. Lákavější myšlenkou každého z nich je ale verze přiznat se a udat toho druhého. Jednak z důvodu vidiny strávit za mřížemi pouze jeden rok a za druhé proto, že pokud se nepřizná a druhý vězeň ho udá, stráví ve vězení deset let. Celá situace je znázorněna v matici

$$\begin{array}{cc}
 & \text{vězeň 2} \\
 & \begin{array}{cc} \text{zapírat} & \text{přiznat se} \end{array} \\
 \text{vězeň 1} & \begin{array}{cc} \text{zapírat} & \begin{pmatrix} -3; -3 & -10; -1 \end{pmatrix} \\ \text{přiznat se} & \begin{pmatrix} -1; -10 & -5; -5 \end{pmatrix} \end{array}
 \end{array}$$

Výsledkem je jediný rovnovážný prvek, který značí strategii, kdy se oba vězni ke svému činu přiznají a odsedí si oba pět let ve vězení.

2.11 Opakované hry

Mnoho situací, k nimž dochází v mezilidských vztazích a jejichž výsledek závisí na rozhodování účastníků, má opakovaný charakter. Jako příklad lze uvést ekonomickou soutěž několika subjektů na trhu, politická vyjednávání apod. Teoretický rámec pro popis a analýzu tohoto druhu situací poskytuje teorie opakovaných her. U opakovaných her se můžeme setkat se skutečností, že z krátkodobého hlediska iracionální jednání může v opakované hře představovat výhodnou strategii. Opakované hry lze v zásadě rozdělit do dvou skupin: na opakované hry s úplnou informací a opakované hry s neúplnou informací. Informace o opakovaných hrách jsou čerpány z knih [13] a [14].

2.11.1 Opakované hry s úplnou informací

Nechť G je hra v normálním tvaru pro n hráčů. Konečná či nekonečná posloupnost her G hraných v čase $t = 1, 2, \dots$ nese označení G^* a nazývá se *superhra*. Strategie hráčů v jednotlivých hrách je zvykem nazývat *akce* a termín *strategie* vyjadřuje postup hráče v rámci celé opakované hry. Předpokladem je, že na konci každé jednorázové hry G zná každý hráč akce všech ostatních hráčů v tomto kole. Rozhodování hráče nezávisí pouze na jeho postupech v minulých kolech, ale také na akcích všech ostatních hráčů ve všech předchozích kolech. Celkový výnos v opakované hře je odvozen od výnosů v jednorázových hrách G pomocí vhodně zvolené metody.

Otázka existence a tvaru Nashovy rovnováhy pro opakovanou hru je obsahem následujícího tvrzení [14, s. 12]: Množina rovnovážných hodnot výplatních funkcí opakované hry G^* je množinou dosažitelných a individuálně racionálních výnosů jednorázové hry G . Uvádí se, že

tato věta, jejíž autor není znám, patřila v době vzniku teorie opakovaných her k matematickému „folkloru“ a v anglicky psané literatuře je proto označovaná jako „Folk Theorem“. Dva základní pojmy, které charakterizují množinu rovnovážných hodnot, jsou dosažitelnost a individuální racionalita. Zhruba řečeno, individuálně racionální je taková hodnota, která dominuje nad výnosem hráče v jednorázové hře podle minimaxového kritéria; dosažitelnost výnosů souvisí s konvexní kombinací možných výplatních profilů jednorázové hry.

2.12 Hry s úplnou a neúplnou informací

Na základě informací, které mají hráči k dispozici se rozlišují hry s úplnou informací a hry s neúplnou informací. V reálných případech většinou úplné informace neexistují. Pokud se dá předpokládat, že nekompletní informace vážně neovlivní výsledek, dají se pro řešení použít hry s úplnou informací. Pokud ale chybějící informace mají zásadní vliv na výsledek, je nutné využít hry s neúplnou informací.

2.12.1 Hry s úplnou informací

Úplná informace značí, že všichni hráči mají kompletní informace o hře před jejím začátkem. Znájí pravidla hry, vědí o všech akcích, které mohou provést i které mohou nastat ze strany jejich protihráčů, pro všechny možné strategie znají výši výher všech hráčů a znají také rozdělení pravděpodobností všech náhodných tahů, které provede *Náhoda*.

2.12.2 Hry s nedokonalou informací

Před vysvětlením her s neúplnou informací je vhodné zmínit pojem hry s nedokonalou informací. Tyto hry se často zaměňují a mnohdy jsou neoprávněně považovány za tytéž. Dokonalá informace znamená, že hráč má znalosti o průběhu hry, zná všechny tahy, které učinili protihráči před ním, i to, jaký je stav hry v daném okamžiku. Kdežto úplná informace znamená, že hráč zná hru před jejím začátkem, zná prostory strategií i výplatní funkce ostatních hráčů. Příkladem hry s dokonalou informací jsou šachy, kdy každý hráč detailně zná celý průběh hry, a protože zná i výplatní funkce jedná se zároveň i o hru s úplnou informací. Mezi hry s nedokonalou informací patří třeba mariáš nebo poker. Jde o karetní hry, kdy hráč zná pouze karty, které má on sám nebo které již byly vyloženy. Avšak karty, které má spoluhráč nebo které zatím nebyly rozdány, nezná.

2.12.3 Hry s neúplnou informací

Hry s neúplnou informací se také označují jako bayesovské hry. V rámci této práce je jim věnovaná samostatná kapitola.

2.12.4 Rovnováhy her

Porovnání koncepcí pro hry s úplnou a neúplnou informací je uvedeno v tab. 1.

Tabulka 1: Rovnováhy jednotlivých her

Typ hry	Normální tvar	Rozvinutý tvar
Úplná informace	Nashova rovnováha	Dokonalá rovnováha podhry
Neúplná informace	Bayesova-Nashova rovnováha	Dokonalá Bayesova rovnováha

Zdroj: [1]

3 HRY S NEÚPLNOU INFORMACÍ

Hry s neúplnou informací se také označují jako bayesovské hry. Jedná se o situace, kdy někteří z hráčů nemají předem o hře úplné informace. Neznají např. strategie protihráčů, jejich výplatní funkce či nemají ponětí o počtu hráčů. Jde o to, že hráč má na počátku rozhodovací situace soukromé informace, které jsou známy jenom jemu samotnému. Tyto hry mají uplatnění např. v ekonomii, kdy obvykle někteří účastníci trhu nemají tolik informací jako ostatní, a jsou oproti nim v nevýhodě. Od počátku vzniku teorie těchto her se ekonomové dlouhou dobu domnívali, že neúplné informace nemají dramatický vliv na dosažené výsledky. Teprve počátkem sedmdesátých let dvacátého století dospěli k závěru, že i nepatrná neznalost informací mezi ekonomickými subjekty může mít na výsledky dramatický vliv. [15]

Základy teorie her s neúplnou informací položil Harsanyi v článku [16], jehož tři části vyšly v časopisu *Management Science* v letech 1967–1968

Existují situace, kde se dá o kompletních informacích pochybovat. Patří mezi ně např.:

- Při dražbě obvykle zájemce o koupi nezná ocenění dražených věcí ostatními zájemci.
- Zaměstnavatel není schopen při přijímacím řízení poznat skutečné schopnosti uchazeče, který se snaží působit co nejlepším dojmem.
- Modely oligopolu předpokládají, že každá firma zná nákladovou funkci nejen svou, ale i ostatních firem. Ve skutečnosti si ale firmy nechávají své informace pro sebe.

V těchto hrách každý hráč s jistotou zná svůj typ, ale neví, jakého typu jsou protihráči. Hráč, který má pouze částečnou informaci o povaze hry, si vytváří jisté apriorní úsudky o parametrech, které nezná. Vzhledem k tomu, že se nachází v interakci s dalšími hráči, potřebuje rovněž úsudky o úsudcích dalších hráčů, úsudky o úsudcích o úsudcích a tak dále do nekonečna. Pro získání optimálního řešení je nutné do hry s neúplnou informací (tzv. I-hry) potřebné informace doplnit, a získat tak hru s úplnou informací (tzv. C-hru). Tento postup nese Harsanyiho jméno a nazývá se *Harsanyiho transformace*. Zavedl pojem typ hráče, který v sobě zahrnuje hráčovy úsudky o povaze hry a úsudcích ostatních hráčů. Mezi účastníky rozhodovací situace přiřadil fiktivního hráče zvaného *Náhoda*, který podle daného rozdělení pravděpodobnosti přiřadí každému hráči jeho typ. Hráč se dozví svůj typ, ale nikoliv typy ostatních hráčů. Se znalostí apriorního rozdělení pravděpodobnosti a svého typu však může učinit aposteriorní úsudek o typech ostatních hráčů a podle toho pak volit svou strategii. Proto se také těmto hrám říká *bayesovské*. Nyní již účastníci hry mají kompletní informace a hra se stala hrou s úplnou informací. Jelikož ale nevědí, jaký typ, komu *Náhoda* přiřadila, jedná se

zároveň o hru s nedokonalou informací. Pro použití Nashovy rovnováhy k vyřešení hry je nutný předpoklad stejných apriorních názorů všech hráčů na pravděpodobnostní rozdělení tahu fiktivního hráče.

Hry s neúplnou informací je možné formulovat buď v normálním tvaru nebo v rozvinutém tvaru. Hry v normálním tvaru jsou statické, hry v rozvinutém tvaru se nazývají dynamické. Jak již bylo uvedeno v tab. 1, pro řešení her s neúplnou informací v normálním tvaru se používá koncepce Bayesovy-Nashovy rovnováhy, pro hry s neúplnou informací v rozvinutém tvaru koncepce Dokonalá Bayesova rovnováha, která je kombinací přístupů Bayesovy-Nashovy rovnováhy a Dokonalé rovnováhy podhry. [1]

3.1 Statická bayesovská hra

Statickou bayesovskou hru určují:

- Množina hráčů $Q = \{1, 2, \dots, N\}$.
- Množina prostorů strategií $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ – soubor všech možných rozhodnutí každého hráče. Množina strategií X_i značí prostor strategií i -tého hráče. Soubor konkrétních strategií (tahů) vybraných všemi hráči je $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ a nazývá se profil tahů.
- Množina prostorů typů hráčů $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ – T_i označuje prostor možných typů i -tého hráče. Typ $t_i \in T_i$ představuje typ hráče i . Soubor typů $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ se nazývá profil typů.
- Množina pravděpodobností všech profilů typů $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ – názor p_i představuje úsudek, který má o typech protihráčů i -tý hráč. Pravděpodobnost, že profil typů bude $(t_1, t_2, \dots, t_N)$ označíme $p(t_1, t_2, \dots, t_N)$.
- Množinou výplatních funkcí $\{f_1(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N), f_2(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N), \dots, f_N(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N)\}$ – f_i určuje výhru i -tého hráče pro každý profil tahů a každý profil typů. Výplatní funkce jsou definovány na kartézském součinu prostoru strategií a prostoru typů hráčů, protože musí stanovit výhru pro všechny přípustné kombinace alternativ. [1]

Statická hra s neúplnými informacemi je označena

$$H = (X_1, \dots, X_N, T_1, \dots, T_N, p_1, \dots, p_N, f_1, \dots, f_N).$$

V bayesovské hře se každý typ každého hráče jeví jako samostatný hráč. Původní počet hráčů ve hře s neúplnými informacemi se tedy navýší podle toho, kolik má každý hráč typů.

Z těchto samostatných hráčů *Náhoda* na základě známého pravděpodobnostního rozdělení náhodně zvolí hráče, kteří se budou hry účastnit. Dalším předpokladem je skutečnost, že každý samostatný hráč volí svou strategii dříve, než *Náhoda* vybere hráče pro hru. Takto získanou hru s nedokonalou informací označíme H^* .

Odlišnosti mezi původní hrou s neúplnou informací a novou hrou s úplnou informací uvádějí autoři Dlouhý Fiala [1, s. 75-76] takto:

Původní hra s neúplnou informací H :

- N hráčů, $i = 1, 2, \dots, N$,
- hráč i má m_i typů,
- množina prostorů strategií: $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$,
- množina výplatních funkcí: $\{f_1(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N), \dots, f_N(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N)\}$.

Hra s nedokonalou informací H^* :

- M hráčů, $j = 1, 2, \dots, M$, kde

$$M = \sum_{i=1}^N m_i,$$

- nově definovaná množina hráčů se skládá z prvků $j = (i, t_i)$,
- množina prostorů akcí: $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_M\}$,
- množina výplatních funkcí: $\{g_1(y_1, y_2, \dots, y_M), \dots, g_2(y_1, y_2, \dots, y_M)\}$,
- hodnoty výplatních funkcí jsou počítány jako očekávané hodnoty

$$g_1(y_1, y_2, \dots, y_M) = \sum_{t_i} p(t_i) f_i(x, t).$$

Ve hrách s úplnými informacemi znamenají pojmy strategie a akce jedno a totéž. Zde se ale jejich význam liší. Akce se používá pro označení volby hráče, který zná svůj typ, kdežto strategie je sada akcí hráče, který svůj typ nezná a musí zvolit akce pro každý možný typ. Strategie hráče i je funkce $x_i(t_i)$ určující akci ze sady X_i pro každý typ t_i . Tuto akci by typ t_i zahrál, pokud by byl *Náhodou* v prvním kole zvolen. I když hráč i ví, jakého je typu, musí naplánovat své akce i pro ostatní typy, kterými by mohl být, protože akce ostatních hráčů jsou závislé právě na akci hráče i . Oni ale typ hráče i neznají.

Postupování ve hře:

- 1) určení typů hráčů $(t_1, t_2, \dots, t_N)$,
- 2) každý hráč získá informaci o svém typu, ale ne o typu ostatních hráčů,
- 3) hráči v jednom okamžiku vyberou své akce z prostorů $X_1, X_2, \dots, X_N$,
- 4) hráči získají výhry $f_1(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N)$. [17]

Pro hry s neúplnou informací H je Bayesova-Nashova rovnováha to samé jako Nashova rovnováha pro hry s nedokonalou informací H^* .

Pro hry s neúplnou informací, které jsou konečné, platí následující věta.

Věta 3: V každé konečné hře s neúplnou informací existuje alespoň jedna Bayesova-Nashova rovnováha. [1]

Rozdělení pravděpodobnosti, které je předem známé a *Náhoda* na jeho základě přiřazuje hráčům jejich typy se značí $p(t)$. Hráč i nezná typy ostatních hráčů. Tyto typy označíme $t_{-i} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_N)$.

Výplatní funkce hráče závisí kromě množiny prostorů strategií také na množině prostorů typů, kterou hráčům náhodně přiřazuje *Náhoda*. Jelikož cílem hráčů je maximalizovat svou výhru, budou volit takové strategie, které jim poskytnou nejvyšší podmíněný očekávaný užitek.

Definice 8: Ve statistické bayesovské hře $H = (X_1, \dots, X_N, T_1, \dots, T_N, p_1, \dots, p_n, f_1, \dots, f_N)$ určuje strategie $\bar{s} = \{\bar{s}_1(t_1), \dots, \bar{s}_N(t_N)\}$ Bayesovu-Nashovu rovnováhu, jestliže pro všechny hráče i a každý jejich typ t_i platí

$$\bar{s}_1(t_1) = \max_{x_i \in X_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} f_i(\bar{s}_1(t_1), \dots, \bar{s}_{i-1}(t_{i-1}), x_i, \bar{s}_{i+1}(t_{i+1}), \dots, \bar{s}_N(t_N); t) p_i(t_{-i}|t_i). \quad (3.1)$$

To znamená, že žádný hráč nechce změnit svou strategii, i když by se jednalo pouze o změnu jedné akce jednoho typu. [17]

Hru s neúplnou informací je možné ilustrovat na následujícím příkladu, který ve své knize [1] uvádí dvojice autorů Dlouhý, Fiala.

Příklad 2:

Zadání: Manželé mají společně strávit večer ve městě. Zatímco manželka by chtěla jít na nákupy, manžel dává přednost fotbalovému zápasu. Nyní jsou v práci a mají se setkat až večer, takže se o programu rozhoduje každý samostatně. Situace je komplikovaná tím, že manžel nemá jistotu o tom, zda chce manželka skutečně strávit společný večer. Jsou dvě možnosti:

a) Manželka chce být s manželem.

Večer chtějí strávit společně. Hodnoty užiteků ve výplatní matici udávají, že pokud budou večer spolu, získají oba jednotku užitku, plus další jednotku užitku, pokud budou dělat činnost podle svého přání. Pokud se ale nesetkají, nemají ze situace žádný užitek a ve výplatní matici bude nula. Tento konflikt je popsán níže v matici.

manželka chce vidět manžela

		<i>kopaná</i>	<i>nákupy</i>
<i>manžel</i>	<i>kopaná</i>	$\begin{pmatrix} 2; 1 & 0; 0 \\ 0; 0 & 1; 2 \end{pmatrix}$	
	<i>nákupy</i>		

b) Nyní si manžel není jistý manželčinou náladou. Manželka preferuje dnes večer manžela nevidět, což manžel kvůli ranní hádce z 50 % předpokládá. Manžel také preferuje manželku raději nevidět. Výplatní matice má nyní tvar

manželka nechce vidět manžela

		<i>kopaná</i>	<i>nákupy</i>
<i>manžel</i>	<i>kopaná</i>	$\begin{pmatrix} 2; 0 & 0; 2 \\ 0; 1 & 1; 0 \end{pmatrix}$	
	<i>nákupy</i>		

V tomto případě se jedná o hru s neúplnou informací, protože manžel nemá tušení, v jaké náladě se manželka nachází, to ví pouze ona sama. Hru dvou hráčů s neúplnou informací převedeme na hru tří hráčů s nedokonalou informací. Hrát bude manžel, manželka typ 1 (chce být s manželem) a manželka typ 2 (nechce být s manželem). Pravděpodobnostní rozdělení typů 0,5:0,5 před tahem *Náhody* znají oba, ale pouze manželka se na počátku hry dozví, jaký typ ji bude přiřazen. Manžel nezná typ manželky, a proto musí odhadnout optimální akce obou typů manželky.

Ve výplatní matici 3 hráčů uvedené níže, označuje první hodnota výplatu manžela, druhá výplatu manželky typu 1 a třetí výplatu manželky typu 2. Hodnoty manželky jsou převzaty ze zadání a) a b), hodnoty užitku manžela jsou přepočítány.

		manželka typ 1 a 2			
		(k, k)	(k, n)	(n, k)	(n, n)
manžel	kopaná	2; 1; 0	1; 1; 2	1; 0; 0	0; 0; 2
	nákupy	0; 0; 1	0,5; 0; 0	0,5; 2; 1	1; 2; 0

Ukázka výpočtu výplaty pro manžela jdoucího na nákupy, když akce manželky je (k, n): s manželkou typ 1 se nevidí, proto z toho nemá užitek, s manželkou typ 2 se vidí, ale protože je to pouze s 50 % pravděpodobností, má z toho užitek $0,5 \cdot 1$

$$0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 = 0,5$$

Ve výplatní matici je potřeba určit rovnovážné akce všech hráčů. Manžel potřebuje najít sloupcová maxima svých užiteků, což jsou v matici první hodnoty, manželka hledá maxima v řádcích, pro typ 1 ze středních hodnot a pro typ 2 hodnot posledních. Maxima jsou barevně označena. Ve výplatní matici níže je vidět, že tato hra má jednu Bayesovu-Nashovu rovnováhu v ryzích strategiích. Jedná se o trojici čísel, která je celá barevně označena.

		manželka typ 1 a 2			
		(k, k)	(k, n)	(n, k)	(n, n)
manžel	kopaná	2; 1; 0	1; 1; 2	1; 0; 0	0; 0; 2
	nákupy	0; 0; 1	0,5; 0; 0	0,5; 2; 1	1; 2; 0

Rovnovážným řešením je strategie (kopaná, kopaná, nákupy). Manžel se vydá na kopanou a bude čekat, zda přijde i manželka s dobrou náladou, nebo zda se manželka raději vydá na nákupy.

3.2 Opakované hry s neúplnými informacemi

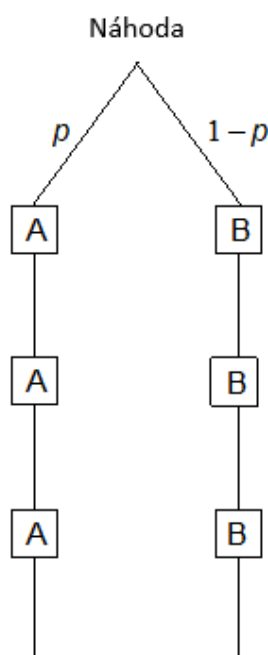
Opakované hry s neúplnou informací se často vyskytují v reálných situacích, ať už jde o ekonomickou soutěž v oligopolním prostředí, v níž jednotliví účastníci nemají informace o nákladech konkurentů, o politická vyjednávání, ve kterých jednotlivé strany mají různé informace o interních poměrech ostatních stran apod. Touto problematikou se od poloviny šedesátých let systematicky zabývali Aumann a Maschler. Na základě jejich knihy [18] je tato kapitola sepsána.

Od jednokolových her se liší tím, že se hrají několikrát za sebou. Opakujících se etap může být až nekonečně mnoho. Hráči, kteří nemají dostatek informací, je mohou získat pozorováním tahů, které učinila druhá strana během předchozích etap. Nedostatek informací může mít pouze jeden hráč, ale mohou chybět také na obou stranách. Ukazuje se, že strategie v opakované hře se může od strategie v jednorázové hře zásadně lišit. Pokud by se totiž hráčova volba optimální strategie v jednorázové hře opakovala, mohl by protihráč odvodit míru jeho znalostí. Důsledkem opakovaného používání informace, kterou hráč 1 disponuje, je postupné odhalování této informace protihráči. Přirozené otázky, které řešení tohoto typu her přináší, se týkají volby optimální strategie, významu informace o charakteru hry, důsledků odhalování této informace apod.

Základní rozlišení je na hry s nulovým součtem a hry s nenulovým součtem. Původní model rozpracovaný Aumannem a Maschlerem se týkal speciálního případu her s nulovým součtem pro dva hráče, kdy na začátku je s pravděpodobností p vybrána hra A a s pravděpodobností $1 - p$ hra B . V obou případech jde o maticové hry popsané maticemi stejného typu. V každé

fázi vybírá hráč 1 řádek i a hráč 2 sloupec j . Pravděpodobnost p vyjadřuje počáteční (a priori) názor hráče 2 na to, jaký stav *Náhody* byl zvolen a která hra se hraje.

Předpokládejme, že zvolená hra je hrána opakovaně. Hráč 1 mající úplné informace ví, o kterou hru jde. Hráč 2 je pouze informován o tom, že s pravděpodobností p se jedná o hru A . Tato situace může být chápána jako hra G^* s úplnou informací, v níž v prvním tahu *Náhoda* vybere s pravděpodobností p hru A a s pravděpodobností $1 - p$ hru B , přičemž o výsledku je informován hráč 1, ale ne hráč 2. Schéma hry je znázorněno na obr. 1.



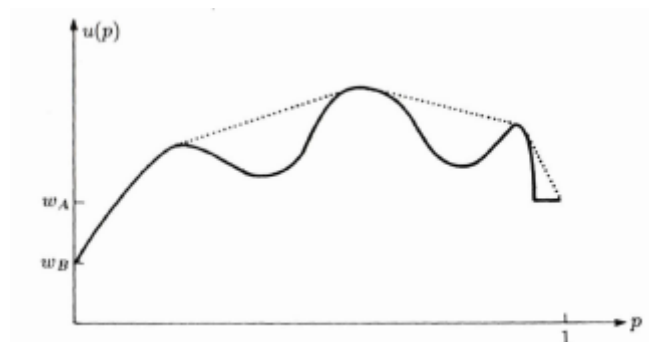
Obrázek 1: Schéma hry

Zdroj: upraveno podle [18]

Základním Aumannovým a Maschlerovým výsledkem je věta vyjadřující hodnotu opakované hry pomocí hodnoty jednorázové hry.

Věta 4: $v(p) = Cav u(p)$.

Symbolem $v(p)$ označujeme hodnotu hry G^* a symbolem $u(p)$ hodnotu jednorázové hry (za předpokladu, že hráč 1 svou informaci ignoruje). $Cav u$ je nejmenší konkávní funkce taková, že pro každé p je $Cav u(p) \geq u(p)$. Vztah mezi funkcemi u a $Cav u$ ilustruje obr. 2. Graf funkce $Cav u$ je znázorněn čárkovaně v intervalech, ve kterých je $Cav u(p) \neq u(p)$.



Obrázek 2: Vztah mezi funkcemi u a $Cav u$

Zdroj: [18]

Důkaz nerovnosti $v(p) \geq Cav u(p)$ je založen na skutečnosti, že $v(p)$ je konkávní, neboť ve hře s nulovým součtem nemůže informace hráče poškodit, a zároveň je $v(p) \geq u(p)$, neboť hráč 1 může svou informaci ignorovat. Základní myšlenka komplikovaného důkazu obrácené nerovnosti spočívá ve využití skutečnosti, že podle minimaxové věty existuje smíšená strategie, která hráči 1 zaručuje hodnotu $v(p)$. Na základě této strategie usuzuje hráč 2 postupně s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, p_3, \dots$, že na počátku byla vybrána hra A . Tato posloupnost aposteriorních pravděpodobností interpretovaných jako náhodné veličiny, má podle Doobovy věty o konvergenci martingalu limitu q , jejíž střední hodnota je rovna apriorní pravděpodobnosti p . S využitím Jensenovy nerovnosti pro konkávní funkci $Cav u$ a náhodnou veličinu q pak dostáváme dokazované tvrzení.

Aumann s Maschlerem rozpracovali rovněž teorii opakovaných her s neúplnou informací pro hry s nenulovým součtem a pro hry, ve kterých všichni hráči mají pouze částečnou informaci. Podrobnosti lze nalézt v knize [18].

4 APLIKACE HER S NEÚPLNOU INFORMACÍ

Základních poznatků teorie her s neúplnou informací je dále využíváno v různých aplikacích. Patří mezi ně signální hry a aukce, o nichž pojednávají následující kapitoly.

4.1 Signální hry

Signální hry patří do oblasti her s neúplnou informací. To, jak může hráč pomocí signálů sdělit svou soukromou informaci ostatním hráčům, ukázal jako první americký ekonom Andrew Michael Spence (*1947) svým signalizačním modelem na trhu práce. Typické pro signální hry je skutečnost, že úplné informace má pouze jedna strana a druhá strana může tyto informace pouze odvodit na základě vysílaných signálů. Signální hra je tedy hrou dvou hráčů, odesílatele a příjemce, kdy akci zvolí nejprve odesílatel a poté příjemce. Příjemce je pouze jednoho typu. Informace o signálních hrách jsou čerpány z [17] a [19].

Časování signální hry:

- 1) Výběr typu odesílatele z množiny možných typů $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ na základě pravděpodobnostního rozdělení $p(\theta_i)$, kde

$$\sum_{i=1}^n p(\theta_i) = 1.$$

- 2) Odesílateli je oznámen jeho typ θ_i a z množiny přípustných signálů (zpráv)

$M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ zvolí signál m_i .

- 3) Příjemce nezná typ odesílatele, ale pozoruje jeho vysílanou zprávu m_i , a na základě té vybere akci a_i z množiny $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

- 4) Hráči získají výplaty $u_o(\theta_i, m_i, a_i)$, $u_p(\theta_i, m_i, a_i)$.

Dokonalá bayesovská rovnováha v signální hře

V signální hře je dokonalá bayesovská rovnováha tvořena takovým profilem strategií a profilem úsudků, které splňují:

- Nashovo rovnovážné řešení je tvořeno souborem strategií na základě úsudků příjemce zprávy o typu, který vyslal signál. Tento názor je vyjádřen pravděpodobností $p(\theta_i|m_i)$, kde

$$\sum_{\theta_i \in \Theta} p(\theta_i|m_i) = 1. \quad (4.1)$$

- Příjemcovou strategií je v každé informační množině vybrat takový tah, který maximalizuje jeho očekávaný užitek na základě úsudků hráče $p(\theta_i|m_i)$ o typech ostatních hráčů.

Tedy $\bar{a}(m_i)$ je řešením

$$\max_{a_i \in A} \sum_{\theta_i \in \Theta} p(\theta_i|m_i) u_p(\theta_i, m_i, a_i). \quad (4.2)$$

- Signál odesílatele $\bar{m}(\theta_i)$ pro všechny typy θ_i maximalizuje jeho užitek při strategii příjemce $\bar{a}(m_i)$, tzn. $\bar{m}(\theta_i)$ je řešením úlohy

$$\max_{m_i \in M} u_p(\theta_i, m_i, \bar{a}(m_i)). \quad (4.3)$$

- Každý úsudek hráče $p(\theta_i|m_i)$ musí být odvozen pomocí Bayesova vzorce z rovnovážného profilu strategií a z počátečních všeobecně známých úsudků

$$p(\theta_i|m_i) = \frac{p(\theta_i)}{\sum_{\theta_i \in \Theta} p(\theta_i)}. \quad (4.4)$$

4.1.1 Spenceův signální model práce

Spence předpokládá, že uchazeči o zaměstnání jsou dvojího typu, s nízkou a vysokou produktivitou. Svůj typ znají pouze potencionální zaměstnanci, ale zaměstnavatelé se snaží jeho produktivitu odhadnout na základě vysílaných signálů, které může pozorovat. Jsou jimi např. dosažené vzdělání, způsob oblékání atd.

V tomto výkladu je uvažováno se třemi hráči, jeden uchazeč o práci – hráč U a dvě firmy, které práci nabízejí – F_1, F_2 .

Hra je časována takto:

- 1) Jsou určeny schopnosti (produktivita) hráče U , kdy θ_1^H (vysoké) nebo θ_1^L (nízké),
a pravděpodobnost p , že schopnosti budou vysoké.
- 2) Hráč U si určí úroveň svého vzdělání $e \geq 0$.
- 3) Firmy F_1, F_2 znají vzdělání uchazeče, ale nemají tušení o jeho schopnostech, v této fázi
mu také nabídnou plat.
- 4) Uchazeč si vybere nabídku mzdy a označí ji w .
- 5) Výplatní funkce:

- Pro uchazeče je

$$w - \frac{e}{\theta_i},$$

kde $\frac{e}{\theta_i}$ je cena vzdělání hráče U typu θ_i .

- Pro firmu, která zaměstná uchazeče je

$$\theta_i - w,$$

kde θ_i je produktivita hráče U .

- Pro firmu, která uchazeče nezaměstná je 0.

Předpoklady Spenceova modelu:

- Signálem pro firmu o schopnostech uchazeče je jeho vzdělání.
- Marginální cena vzdělání znamenající úsilí, které musí hráč U vynaložit, je pro uchazeče
typu θ_1^L vyšší nežli pro uchazeče typu θ_1^H , platí

$$\frac{e}{\theta_1^L} > \frac{e}{\theta_1^H}.$$

Z toho vyplývá, že uchazeči s vysokou produktivitou získají vzdělání snadněji než uchazeči s produktivitou nízkou.

- Konkurence stlačuje zisk firem na 0.

V případě, že jsou schopnosti uchazeče známy a předpokladem je nulový zisk pro firmu, nabídne firma mzdu, která se rovná produktivitě hráče

$$w = \theta_i. \quad (3.5)$$

Uchazeč nehledě na své vzdělání e maximalizuje svou výplatní funkci, která je rozdílem jeho produktivity a ceny za vzdělání

$$\theta_i - \frac{e}{\theta_i}. \quad (4.6)$$

Rovnovážným řešením úlohy, kdy jsou známy schopnosti uchazeče, je $\bar{e}(\theta_i)$.

Jelikož ale schopnosti hráče U nejsou předem známy, může hráč typu θ_1^L také předstírat, že má schopnosti vysoké., čímž dostáváme dva případy:

- 1) Získat vzdělání $\bar{e}(\theta_1^H)$ je pro hráče typu θ_1^L příliš drahé a nebude chtít získat vyšší výplatu hráče typu θ_1^H . Platí

$$\bar{w}(\theta_1^L) - \frac{\bar{e}(\theta_1^L)}{\theta_1^L} > \bar{w}(\theta_1^H) - \frac{\bar{e}(\theta_1^H)}{\theta_1^L}. \quad (4.7)$$

- 2) Hráč typu N bude chtít získat výplatu hráče typu V , a proto se bude tvářit jako on. Platí

$$\bar{w}(\theta_1^L) - \frac{\bar{e}(\theta_1^L)}{\theta_1^L} < \bar{w}(\theta_1^H) - \frac{\bar{e}(\theta_1^H)}{\theta_1^L}. \quad (4.8)$$

V této hře existují dva typy dokonalé bayesovské rovnováhy – spojující a rozdělující.

Spojující rovnováha

V případě spojující rovnováhy volí oba typy shodnou úroveň vzdělání, kdy

$$e^L = e^H = \bar{e}$$

a mzda je

$$w = p\theta_1^H + (1 - p)\theta_1^L. \quad (4.9)$$

Pro výpočet možných hodnot $\bar{e}$, vycházíme z toho, že pokud si pracovník zvolí $e \neq \bar{e}$, musí v rovnováze obdržet výplatu $w(e)$, kdy platí

$$w(e) - \frac{e}{\theta_1^K} \leq \bar{w} - \frac{\bar{e}}{\theta_1^K}, \quad (4.10)$$

pro $K = L, H$.

Zaměstnavatel věří, že nerovnost jistě platí pro uchazeče typu θ_1^L a stanoví pro $e \neq \bar{e}$ mzdu

$$w(e) = \theta_1^L. \quad (4.11)$$

Maximální nerovnosti je dosaženo volbou $e^L = 0$, kdy platí

$$\theta_1^L \leq \bar{w} - \frac{\bar{e}}{\theta_1^L}. \quad (4.12)$$

Následující úpravou (4.13) dostaneme rovnovážnou úroveň vzdělání $\bar{e}$

$$\frac{\bar{e}}{\theta_1^L} \leq \bar{w} - \theta_1^L$$

$$\frac{\bar{e}}{\theta_1^L} \leq p\theta_1^H + (1-p)\theta_1^L - \theta_1^L$$

$$\frac{\bar{e}}{\theta_1^L} \leq p\theta_1^H + \theta_1^L - p\theta_1^L - \theta_1^L$$

$$\bar{e} \leq \theta_1^L p(\theta_1^H - \theta_1^L). \quad (4.14)$$

Rozděľující rovnováha

V případě rozděľující rovnováhy volí každý typ jinou úroveň vzdělání, kdy $e^L \neq e^H$. Pokud $e^L = 0$ a mzda $w(e) = \theta_1^L$, je potřeba stanovit úroveň e^H tak, aby pro hráče θ_1^L nebylo výhodné předstírat hráče θ_1^H a totéž obráceně. Musí platit

$$\theta_1^L \geq \theta_1^H - \frac{e^H}{\theta_1^L} \quad (4.15)$$

a

$$\theta_1^H - \frac{e^H}{\theta_1^H} \geq \theta_1^L. \quad (4.16)$$

Po úpravách (4.15) a (4.16) je úroveň vzdělání e^H rovna

$$\theta_1^L(\theta_1^H - \theta_1^L) \leq e^H \leq \theta_1^H(\theta_1^H - \theta_1^L). \quad (4.173)$$

Rozdělující rovnováha nastává v případě, že

$$e^L = 0$$

a

$$e^H \in \langle \theta_1^L(\theta_1^H - \theta_1^L), \theta_1^H(\theta_1^H - \theta_1^L) \rangle.$$

Jestliže zaměstnavatel obdrží zprávu, na základě které se úroveň vzdělání e liší od e^H , má důvod se domnívat, že uchazeč je typu s nízkou produktivitou θ_1^L .

Pro úplnou charakteristiku rovnovážných strategií je nutné přidat názor firem pro výběr vzdělání $e \neq e_s$ určující jejich nabídku a ukázat, že pro hráče U je nejlepší odpovědí na strategie firem $w(e)$ zvolit $e = e_s$.

4.1.2 Firemní investice a kapitálová struktura

Tuto hru tvoří:

- Dva hráči. Hráč M , který je majitelem firmy a má nový projekt, a hráč I , který je investorem a neví, zda má projekt financovat či nikoli.
- Zisk firmy, který je vysoký $Z = V$ nebo nízký $Z = N$.
- Hodnota investice I .
- Zisk z projektu R .

Předpokladem je úspěšnost projektu, kdy

$$R > I(1 + r),$$

kde r značí míru zisku pro alternativní možnosti investora

Časování hry:

- 1) Je stanoveno, zda firma má nízký či vysoký zisk, a pravděpodobnost p toho, že $Z = N$.
- 2) Majitel firmy má signál o zisku Z a nabídne investorovi podíl na firmě a , kdy platí
$$0 \leq a \leq 1.$$
- 3) Investor neví nic o zisku Z , ale přijímá signál o podílu a , a rozhoduje se, zda nabídku přijme nebo ne.

4) Výplaty hráčů, pokud investor přijme nabídku:

- investor má $a(Z + R)$,
- majitel má $(1 - a)(Z + R)$.

Výplaty hráčů, pokud investor odmítne nabídku:

- investor má $I(1 + r)$,
- majitel má Z .

S vírou, že s pravděpodobností q je $Z = N$, přijme investor nabídku, pokud

$$a[qN + (1 - q)V + R] \geq I(1 + r), \quad (4.18)$$

a pro majitele je financování projektu zajímavé, pokud

$$(Z + R)a \leq R. \quad (4.19)$$

Spojující rovnováha

Zde musí být předsevzetí investora $q = p$. To platí více pro $Z = V$ než pro $Z = N$. Spojující rovnováha tedy existuje, pokud

$$\frac{I(1 + r)}{pN + (1 - p)V + R} \leq \frac{R}{V + R}. \quad (4.20)$$

Toto platí vždy, když p je blízko nule. Pro p blížící se jedné to platí pouze tehdy, když

$$R - I(1 + r) \geq \frac{I(1 + r)V}{R} - V. \quad (4.21)$$

Rozdělující rovnováha

Tato rovnováha existuje vždy.

- Investor přijme nabídku $a = \frac{I(1+r)}{V+R}$, kterou mu nabídne majitel typu N.
- Investor odmítne nabídku $a < \frac{I(1+r)}{V+R}$, kterou mu nabídne majitel typu V.

Je patrné, že majitel typu N má vždy lepší podmínky než majitel typu V . Míra investic je neefektivně nízká, a i když je projekt pro typ V ziskový, investor ho nepřijme.

4.2 Aukce

V dnešní době patří aukce k velmi rozšířeným způsobům prodeje a nákupu předmětů z různých oblastí trhů. Fiala [15, s. 7] definuje aukce jako *důležitý tržní mechanismus pro alokaci zboží a služeb, který vyrovnává poptávku a nabídku*. Konečná cena v aukcích se vytváří na základě všem účastníkům předem známých pravidel. Poznatky o aukcích jsou, pokud nebude uvedeno jinak, sepsány podle knih [1] a [15].

4.2.1 Historie

Historie aukcí sahá do daleké minulosti. První zmínku o aukcích podal řecký historik Herodotos, podle něhož roku 500 př. n. l. byly draženy ženy jako nevěsty. Prodat ženu mimo aukci bylo v té době nezákonné. Vyvolávací cena byla vysoká a později se snižovala, dokud se nenašel zájemce. Musela však být dodržena minimální stanovená cena.

V Římě byly aukce používány pro prodej rodinných statků. Římský císař a filosof Marcus Aurelius rozprodal prostřednictvím aukcí rodinný nábytek, aby splatil dluhy. V roce 193 byla vydražena celá římská říše. [20]

V Číně mniši používali aukce k prodeji majetku zesnulých mnichů. V roce 1655 se ve městě New Amsterdam konala první dražba otroků. Až do roku 1865, kdy bylo otroctví v Americe zrušeno, šlo o nejběžnější způsob nákupu a prodeje afrických otroků.

Nejstarší aukční dům Stockholms Auktionsverk byl založen roku 1674 ve Švédsku. V dnešní době druhá největší aukční síň na světě Sotheby's byla založena roku 1744 a největším aukčním domem je dnes Christie's, založena roku 1766. V 17. století se ukončení aukce odvíjelo od toho, jak dlouho hořela svíčka. Na začátku procesu se svíčka zapálila a v okamžiku jejího pohasnutí vyhrál zájemce s aktuálně nejvyšší nabídkou. [21]

V první aukci, která se konala v síni Sotheby's, prodal Samuel Baker sbírku knih sira Johna Stanleyho. V roce 1767 začal Baker spolupracovat s odborníkem na aukce Georgem Leighem, který také společně se synovcem Bakera Johnem Sothebyem po jeho smrti roku 1778 převzal majetek aukční síně. V té době se dražily především starožitnosti, mince a tisky. V období první světové války se stále více orientovala na umění. V současné době má Sotheby's sídlo v New Yorku, mezinárodní síť 80 kanceláří ve 40 zemích a stovky expertů v 70 sběratelských oblastech. Také v Česku má své zastoupení, kromě kanceláře se zde nachází i jedna divize, realitní společnost Sotheby's International Realty. V posledních letech se zde vydražil nejdražší diamant na světě, vzorek z měsíce, nejdražší tištěná publikace atd. Sotheby's je nejstarší

společností kótovanou na newyorské burze. Jejím největším konkurentem je aukční síň Christie's. [22]

Síň Christie's byla založena o dvacet dva let později v Londýně Jamesem Christiem. Její zakladatel, odhadce uměleckých děl, byl vynikající řečník. V roce 1999 převzal aukční síň francouzský miliardář François-Henri Pinault. Společnost sídlí v Londýně a New Yorku. Působí ve 46 zemích a zboží nabízí v 80 kategoriích. V roce 2000 byl odhalen skandál, kdy se zjistila nelegální spolupráce s aukční síní Sotheby's při stanovování cen. [23]

Dnes se aukční metoda prodeje používá na všechno zboží ve všech koutech světa. S rozvojem internetu se tato metoda stala ještě více oblíbenou. Internetové aukce byly poprvé zavedeny roku 1995 vznikem webových stránek Auction Web (pozdější eBay). V těchto aukcích je obvykle nastaven čas ukončení a výhercem se stává ten, jehož nabídka je v době ukončení nejvyšší. Poté ve většině případů komunikují prodávající a kupující prostřednictvím emailů. Elektronické aukce v České republice se konají prostřednictvím Aukra, které bylo založeno v srpnu 2003. [21]

Nejznámější aukční portál eBay založil 1995 Pierre Omidyar pod názvem Auction Web. Úmyslem nebylo ani tak založit aukční portál, jako spíše vyzkoušet si programování jednoduché inzertní aukce. V té době patřil web spolu s dalšími třemi webovými stránkami, kterými byly stránka cestovní kanceláře, Omidyarova osobní byznysová stránka a stránka věnována viru Ebola, pod jeden název eBay Internet. K přejmenování na eBay a změně webových stránek došlo v roce 1997. Prvním prodaným předmětem bylo rozbité laserové ukazovátko, které Omidyar na portál vložil pro testování, a byl velmi překvapen, když ukazovátko opravdu prodal. Prvním zaměstnancem a zároveň prezidentem portálu eBay byl Jeffrey Skoll, který svými marketingovými schopnostmi přilákal ještě více příznivců. Necelý rok po svém spuštění zprostředkovala společnost milionovou transakci. Po Skollovi v roce 1998 převzala vedení Meg Whitemanová. V té době eBay vstoupil na burzu. V roce 2000 došlo ke změně systému, kdy uživatelé již nemuseli požadovanou věc dražit, ale pomocí nového tlačítka „Kup teď“, mohli danou věc za stanovenou cenu hned koupit. Díky četným akvizicím zejména aukčních portálů a online prodejců zboží, ale i velkému množství příznivců, se eBay neustále rozrůstal. Mezi nejvýznamnějšími akvizice patří koupě online platebního systému PayPal a komunikační služby Skype. [24]

Významnou osobností aukční teorie her je William Vickrey (1914–1996), nositel Nobelovy ceny za ekonomii v roce 1960, který chtěl pro prodej veřejných statků využít speciální aukce

již 30 let předtím, než si získala svou oblibu. Americká federální komise pro komunikaci nebrala jeho důvody na zřetel a teprve kongres USA, který se s nimi obeznámil rozhodl, že aukce se využije pro další sérii telekomunikačních frekvencí. Tato aukce byla vedena Paulem Milgromem a její zisk byl 20 miliard dolarů. [20]

Vickrey zavedl model s nezávislými individuálními hodnotami, kdy každý nabízející zná vlastní hodnotu pro každý balíček objektů, ale nezná hodnoty ostatních nabízejících. Toto ocenění je vzájemně nezávislé. Oproti tomu Wilson se zaměřil na model aukcí se všeobecnými hodnotami, které jsou pro všechny nabízející stejné. Tato hodnota je ale nejistá a závislá na individuálních informacích každého nabízejícího. Tyto prvky spojil Milgrom a zavedl sdružený model aukcí s individuálními i všeobecnými hodnotami.

V oblasti aukcí se také proslavil britský ekonom Kenneth Binmore (*1940). Jeho knihu *Game Theory: A Very Short Introduction* přeložil do češtiny Ondřej Marek pod názvem *Teorie her: --a jak může změnit váš život*. Uvádí v ní, že on sám vedl tým, který navrhoval telekomunikační aukce v zemích, jako je např. Belgie, Izrael, Dánsko a další. Nejúspěšnější z nich byla aukce ve Velké Británii, která přinesla 35 miliard dolarů. [20]

4.2.2 Klasifikace aukcí

Aukce mohou být děleny podle různých hledisek. Mezi základní patří tato klasifikace.

Podle způsobu podávání nabídek:

- Otevřené aukce – všechny nabídky jsou viditelné.
- Uzavřené aukce – jedná se o obálkovou metodu, kdy jsou nabídky podávány v zalepených obálkách.

Podle mechanismu změny ceny:

- Aukce s rostoucí cenou – cena se zvyšuje do té doby, než zůstane pouze jediný zájemce.
- Aukce s klesající cenou – vyvolávací cena je vysoká a snižuje se tak dlouho, než se objeví první zájemce

Podle počtu dražených objektů:

- Aukce s jedním typem objektů.
- Aukce více-objektové sekvenční – objekty se prodávají postupně.
- Kombinatorické aukce (více-objektové simultánní) – více objektů se prodává v kombinacích.

Podle typu hodnoty objektů:

- Soukromá hodnota – objekt dražby má pro každého zájemce svou hodnotu, která není nijak ovlivněna hodnotami ostatních účastníků aukce.
- Všeobecná hodnota – hodnota je pro každého zájemce shodná, ale není v době aukce přesně známá. Představu si může každý vytvořit pouze na základě zjištěných informací. Např. při koupi ropného vrtu nikdy přesně neví, kolik ropy se dá vytěžit. Někaké informace je možné získat na základě geologických signálů.
- Sdružená hodnota – zahrnuje dva předchozí typy. Např. při koupi domu je privátní soukromá hodnota, ale důležitá je i hodnota potencionálních zájemců v případě pozdějšího prodeje.

Podle počtu prodávajících a kupujících:

- Standardní aukce – jsou zaměřené na prodej, kdy je jeden prodávající a více zájemců o dražený objekt.
- Reverzní aukce – jsou zaměřené na nákup, kdy jeden kupující má na výběr více prodávajících.
- Dvojité aukce – kombinace předchozích typů, kdy dochází k výměně mezi více kupujícími a prodávajícími.

4.2.3 Typy aukcí s jedním typem objektů

K provádění aukcí se používají různé aukční mechanismy. Jde o postup, který nabídky transformuje na alokaci a platbu. Alokací se rozumí přidělení dražených věcí výhercům aukce. Mezi nejznámější aukce patří:

- Anglická aukce – jedná se o otevřenou aukci s rostoucí cenou, kdy vyvolávací cena je nízká a v případě více zájemců se postupně zvyšuje. Pokud již nikdo není ochoten cenu navýšit, aukce končí tradičním zvoláním „poprvé, podruhé, potřetí!“, a vyhrává ji zájemce s nejvyšší nabídkou. Za tuto nabídku předmět aukce koupí. Využívají se při prodeji domů, aut, uměleckých předmětů atd. Tuto aukci používají při prodeji aukční síně Christie's a Sotheby's.
- Holandská aukce – na rozdíl od anglické aukce se jedná o dražbu s klesající cenou, kdy prodávající vyvolávací cenu nadhodnotí a postupně ji snižuje, dokud se neobjeví první zájemce. Kupující za objekt zaplatí průběžnou cenu, na které dražbu zastavil. Tyto aukce jsou velmi rychlé, a proto našly své uplatnění např. při prodeji květin v Holandsku

a ryb v Izraeli. Mohou být ale také pomalé, ty se využívají např. při prodeji použitého nábytku, a jejich princip spočívá v tom, že se cena neprodaných objektů sníží každý měsíc o 10 %. [20]

- Aukce první ceny (tichá aukce s první cenou) – jedná se o uzavřenou aukci, kdy zájemce o dražený objekt zašle svoji nabídku, aniž by znal nabídky ostatních zájemců. Výhercem dražby se stává kupující, který nabídl nejvyšší částku, a za ni také předmět koupí. Je typická pro vládní zakázky. Využívá se také u reverzních aukcí, s tím rozdílem, že vyhrává nejnižší nabídka prodávajícího.
- Aukce druhé ceny (Vickreyova aukce) – je úplně stejná jako aukce první ceny s tím rozdílem, že výherce za objekt dražby nezaplatí cenu, kterou sám nabízel (tj. nejvyšší nabídku), ale zaplatí pouze druhou nejvyšší nabídku. Tato metoda se využívá především pro teoretické analýzy, ale můžeme se s ní setkat v elektronickém obchodování B2B.

4.2.4 Využití bayesovských her v aukcích

Za předpokladu, že se jedná o standardní aukci s jedním prodávajícím a více kupujícími, určují tuto aukci v bayesovských hrách:

- Množina hráčů (kupujících) $Q = \{1, 2, \dots, N\}$.
- Množina prostorů strategií (nabídek) $B = \{B_1, B_2, \dots, B_N\}$. Prostor strategií i -tého hráče je označen B_i . Konkrétní strategie hráčů jsou označeny $\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$.
- Množina prostorů typů hráčů (kupujících) $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$, kde všechny $V_i = [0, \bar{v}]$, $i = 1, 2, \dots, N$. Vybranému typu hráče i odpovídá hodnota v_i . Stejně jako ve všech hrách s neúplnou informací zná každý hráč pouze svůj typ.
- Množina názorů hráčů $F = \{F_1, F_2, \dots, F_N\}$. Distribuční funkce $F(x)$ je stejná pro všechny hráče a vyjadřuje úsudek hráče i o typech svých spoluhráčů. Hodnota $F(x)$ udává pravděpodobnost, že hodnota náhodné proměnné $v \leq x$. Odpovídající hustota pravděpodobnosti je označena $f(x)$.
- Množina výplatních funkcí $\{u_1(b_1, b_2, \dots, b_N, v_1, v_2, \dots, v_N), \dots, u_N(b_1, b_2, \dots, b_N, v_1, v_2, \dots, v_N)\}$, které jsou určeny kartézským součinem prostoru strategií a prostoru typů hráčů.

Základní úlohou v aukcích je ze strany kupujícího najít optimální nabídku a ze strany prodávajícího zvolit takový typ aukce, který bude maximalizovat jeho příjem.

4.2.5 Analýza aukce první ceny

Jde o situace se soukromými nezávislými hodnotami, kdy hráči znají svoji hodnotu objektu v_i a nabízejí $b_i = b(v_i)$. Prodávající nepřijímá záporné nabídky, hodnota objektu je pro něho nulová. Z pohledu hráče 1, který má své hodnocení v_1 a podává nabídku b_1 je jeho výplatní funkce

$$u_i = \begin{cases} v - b_1 & b_1 > \max [b(v_2), \dots, b(v_N)], \\ 0 & b_1 \leq \max [b(v_2), \dots, b(v_N)]. \end{cases} \quad (4.22)$$

Hráč vyhraje aukci, pokud je jeho nabídka nejvyšší a nezíská nic, jestliže nabídka jiného hráče je vyšší než ta jeho. V případě rovnosti alespoň dvou nejvyšších nabídek končí aukce bez prodeje.

Při nabídce b_1 je jeho očekávaný zisk $z(b_1)$ roven součinu možné výhry a pravděpodobnosti, že je jeho nabídka nejvyšší. Platí

$$z(b_1) = (v - b_1)p[b_1 > b(v_2), \dots, b_1 > b(v_N)]. \quad (4.23)$$

Hráč 1 musí zvolit takové $x \in [0, \bar{v}]$, které bude maximalizovat jeho očekávaný zisk

$$z(x) = (v - b(x))p[b(x) > b(v_2), \dots, b(x) > b(v_N)]. \quad (4.24)$$

Jelikož všichni hráči mají stejnou strategii v rovnováze a $b(x)$ je ryze rostoucí, je možné výše uvedenou rovnici (4.24) napsat ve tvaru

$$z(x) = (v - b(x))p(x > v_2), \dots, p(x > v_N) = (v - b(x))F(x)^{N-1}. \quad (4.25)$$

Optimální velikost nabídky je dána

$$b^*(v) = \begin{cases} v - \frac{\int_0^{\bar{v}} F(x)^{N-1} dx}{F(v)^{N-1}} & 0 < v \leq \bar{v}, \\ 0 & v = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Pro distribuční rozdělení $F(x)$, které je distribuční funkcí rovnoměrného rozdělení na intervalu $[0, \bar{v}]$, je úpravou (4.26) optimální nabídka

$$b^*(v) = v - \frac{\int_0^{\bar{v}} x^{N-1} dx}{v^{N-1}} = v - \frac{v^N}{Nv^{N-1}} = \frac{N-1}{N} v. \quad (4.27)$$

Např. pro $N = 3$ by zájemce měl nabídnout $\frac{2}{3}$ svého ocenění draženého předmětu.

Hodnota očekávaného příjmu je shodná s očekávanou hodnotou největší nabídky

$$R^1 = E\{\max[b^*(v_1), b^*(v_2), \dots, b^*(v_N)]\} = E\{b^*[v_1, v_2, \dots, v_N]\}. \quad (4.28)$$

Pravděpodobnost všech hodnocení menších než v je $F(v)^N$ s hustotou $NF(v)^{N-1}f(v)$. Potom (4.28) lze vyjádřit jako

$$R^1 = \int_0^{\bar{v}} Nb^*(v)F(v)^{N-1}f(v)dv. \quad (4.29)$$

4.2.6 Analýza aukce druhé ceny

Stejně jako u aukce první ceny jde o situace se soukromými nezávislými hodnotami. Optimální strategií Vickreyovy aukce je nabízet hodnotu svého vlastního hodnocení.

Strategie hráče i , pro kterou platí

$$z_i(v_i, b_i^*, b_{-i}) \geq z_i(v_i, b_i, b_{-i}), \quad (4.30)$$

a kde $b_i \in [0, \bar{v}]$ a $b_{-i} \in [0, \bar{v}]$, se nazývá dominantní, tzn. maximalizuje očekávané zisky pro kdejaké strategie spoluhráčů. Jestliže každý hráč hraje svoji dominantní strategii, nastává rovnováha v dominantních strategiích.

Z pohledu hráče 1, který má své hodnocení v_1 a podává nabídku b_1 , která je nejvyšší nabídkou ze všech, je jeho očekávaný zisk roven rozdílu mezi jeho hodnocením a druhou nejvyšší nabídkou. Tento očekávaný zisk

$$z_1(v_1, b_1, b_{-1}) = \int_0^{b_1} (N-1)(v_1 - x)f(x)F(x)^{N-2} dx \quad (4.31)$$

se maximalizuje nabídkou, která se rovná vlastnímu hodnocení, tj. $b_1 = v_1$.

Očekávaný příjem v aukci druhé ceny se rovná hodnotě druhého nejvyššího hodnocení.

$$F(v)^N + NF(v)^{N-1}[1 - F(v)] \quad (4.32)$$

udává, že druhá největší hodnota je menší než hodnota v , a hustota pravděpodobnosti je

$$N(N - 1)F(v)^{N-2}[1 - F(v)]f(v). \quad (4.33)$$

Očekávaný příjem prodávajícího vyjadřuje rovnice

$$R^2 = \int_0^{\bar{v}} N(N - 1)vF(v)^{N-2}[1 - F(v)]f(v) dv. \quad (4.34)$$

Otázkou ze strany prodávajícího bylo, jaký typ aukce má zvolit pro maximalizaci svého příjmu. Dvojice autorů Dlouhý, Fiala uvádějí, že za jistých předpokladů platí následující věta.

Věta 5: Věta o ekvivalentnosti příjmů: Základní čtyři typy aukcí (anglická, holandská, první ceny, druhé ceny) se soukromými hodnotami poskytují stejný očekávaný příjem. [1, s. 115]

Mezi základní předpoklady pro platnost věty 5 patří:

- hodnocení mezi kupujícími je nezávisle rozdělené,
- kupující mají neutrální postavení k riziku,
- všichni kupující musí mít dostatek prostředků na zaplacení, nesmí být rozpočtově omezeni,
- všichni kupující mají své hodnoty rozděleny podle stejné distribuční funkce.

5 VYUŽITÍ HER S NEÚPLNOU INFORMACÍ V EKONOMII

Tato kapitola čtenáři na konkrétních příkladech ukazuje, jak je možné teorii bayesovských her využít v oboru ekonomie.

5.1 Příklad 1: Najímání na trhu práce

Firma chce přijmout na pozici vedoucí skladu nového zaměstnance. Jelikož se jedná o vedoucí pozici, zaměstnavatel očekává, že se přihlásí uchazeč, který bude mít vysokou schopnost pro výkon práce vedoucího. Dá se také předpokládat, že se o místo bude zajímat osoba, která má nízké schopnosti na vedení skladového hospodářství i na vedení lidí. Takový uchazeč bude ochoten pro získání pracovní pozice lhát a dělat se velice schopným. Zaměstnavatel však preferuje uchazeče s vysokou schopností. Za jakých podmínek firma přijme uchazeče?

Uchazeč

- Je dvou typů. Má buď nízké schopnosti θ_N nebo vysoké θ_V .
- Zná strategie své γ i svého soupeře δ .

Zaměstnavatel

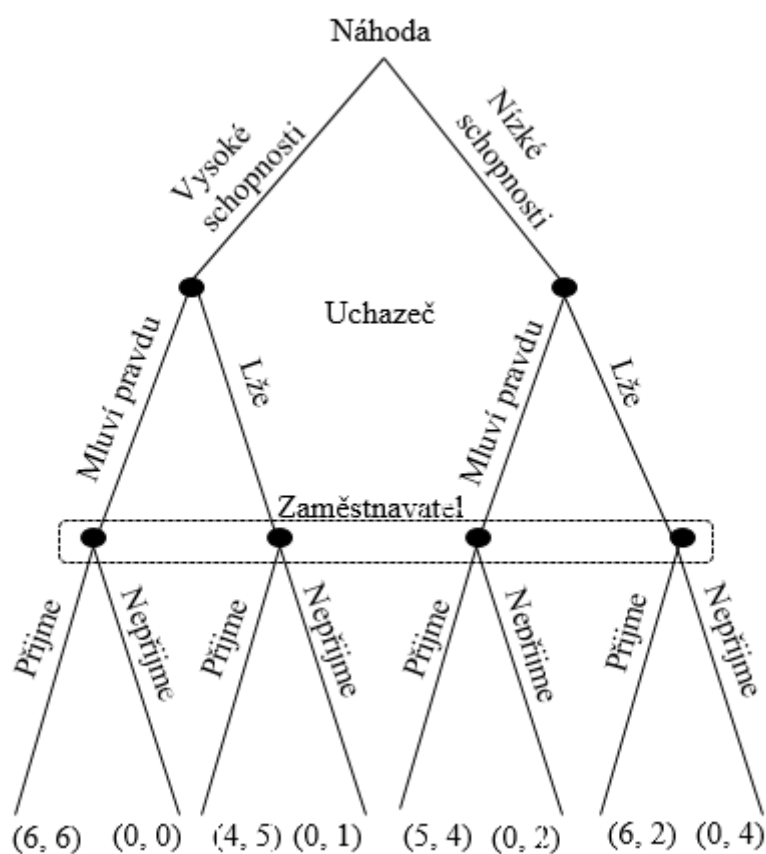
- Je pouze jednoho typu.
- Zná strategie své δ i svého soupeře γ .
- Nezná typ, tj. jaké schopnosti uchazeči přidělí *Náhoda*.
- O schopnostech uchazečů předpokládá, že s pravděpodobností p bude mít schopnosti vysoké a s pravděpodobností $1 - p$ nízké.

Oba účastníci konfliktní situace znají strategie své i svého soupeře. Zaměstnavatel si ale není jistý schopnostmi uchazeče. Jedná se tedy o hru s neúplnými informacemi na jedné straně, a to na straně firmy.

Výplaty, resp. jejich užítky jsou zachyceny v maticích níže.

		<i>Zaměstnavatel</i>				<i>Zaměstnavatel</i>	
		<i>nepřijme</i>	<i>přijme</i>			<i>nepřijme</i>	<i>přijme</i>
<i>Uchazeč</i>	<i>lže</i>	$\begin{pmatrix} 0; 1 & 4; 5 \\ 0; 0 & 6; 6 \end{pmatrix}$		<i>lže</i>	$\begin{pmatrix} 0; 4 & 6; 2 \\ 0; 2 & 5; 4 \end{pmatrix}$		
	<i>mluví pravdu</i>			<i>mluví pravdu</i>			
		<i>vysoké schopnosti</i>				<i>nízké schopnosti</i>	

Hru je možné znázornit formou stromu hry. Strom je znázorněn na obr. 3.



Obrázek 3: Harsanyiho transformace hry

Zdroj: vlastní zpracování

Optimální strategie

Uchazeč s vysokými schopnostmi – strategie „mluví pravdu“ slabě dominuje strategii „lže“.

Pokud se tedy o práci zajímá uchazeč, který má vysoké schopnosti, nemá důvod lhát, a jeho **optimální strategií je vždy mluvit pravdu.**

Uchazeč s nízkými schopnostmi – strategie „lže“ slabě dominuje strategii „mluví pravdu“.

Pokud se tedy o práci zajímá uchazeč, který má nízké schopnosti, bude dělat všechno proto, aby práci vedoucího získat. **Jeho optimální strategií je za každých okolností lhát.**

Zaměstnavatel – zná strategie uchazeče o práci, kdy lže a kdy mluví pravdu. Nezná však, jaký typ mu *Náhoda* přidělila. Při volbě svých strategií bude z výplatní matice s vysokými schopnostmi volit s pravděpodobností p řádek „mluví pravdu“ a z výplatní matice s nízkými schopnostmi volit s pravděpodobností $1 - p$ řádek „lže“.

Užitky ze strategie „nepřijme“ jsou

$$0p + 4(1 - p) = 4 - 4p.$$

Užitky za strategie „přijme“ jsou

$$6p + 2(1 - p) = 4p + 2.$$

Strategii „nepřijme“ zvolí, pokud platí

$$4 - 4p > 4p + 2$$

$$8p < 2$$

$$p < 0,25.$$

Optimální strategií zaměstnavatele je přijmout uchazeče o práci, pokud má vysoké schopnosti s pravděpodobností $p > 0,25$. Nepřijmout uchazeče o práci, pokud má vysoké schopnosti s pravděpodobností $p < 0,25$. A pokud je pravděpodobnost $p = 0,25$, jsou obě strategie stejně vhodné.

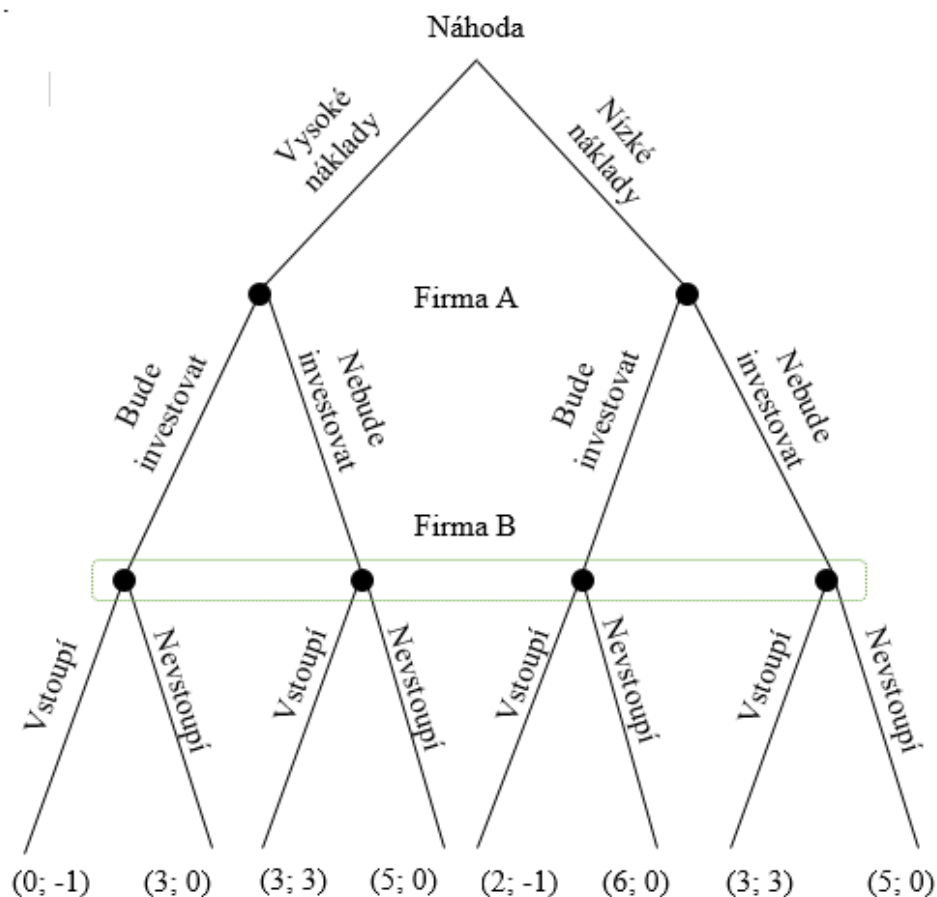
5.2 Příklad 2: Vstup firmy na trh

Na trhu působí firma *A*, která jako jediná dodává unikátní výrobek, o který je obrovský zájem. Bohužel již se svými výrobními možnostmi není schopna uspokojit poptávku po výrobku. Jediným řešením by pro ni bylo navýšení výroby, což by znamenalo jisté investice do vybudování nové výrobní haly, pořízení moderních strojů a navýšení počtu zaměstnanců. Nižší nabídky oproti poptávce si všimla firma *B*, která má k dispozici volné prostory i nevyužitou kapacitu, a proto uvažuje o rozšíření svého portfolia výrobků o požadované zboží. Zda této šance využije, bude záležet na rozhodnutí firmy *A*, jestli bude investovat do navýšení výroby či nikoli. To se bude odvíjet od výše potřebných nákladů na investici.

Firma *A* propočítala potřebné investice a již ví, zda náklady budou vysoké nebo nízké. Tuto soukromou informaci nikomu nesdělí. Firma *B* si vytvořila o těchto nákladech svoje přesvědčení, kdy vysokým nákladům přiřadila pravděpodobnost p a nákladům nízkým pravděpodobnost $1 - p$. Výplatní matice jsou

		<i>Firma B</i>		<i>Firma B</i>		
		<i>vstoupí na trh</i>	<i>nevstoupí na trh</i>	<i>vstoupí na trh</i>	<i>nevstoupí na trh</i>	
<i>Firma A</i>	<i>bude investovat</i>	$\begin{pmatrix} 0; -1 & 3; 0 \\ 3; 3 & 5; 0 \end{pmatrix}$		<i>bude investovat</i>	$\begin{pmatrix} 2; -1 & 6; 0 \\ 3; 3 & 5; 0 \end{pmatrix}$	
	<i>nebude investovat</i>			<i>nebude investovat</i>		
		<i>vysoké náklady</i>		<i>nízké náklady</i>		

Hru je možné znázornit formou stromu hry. Strom je znázorněn na obr. 4.



Obrázek 4: Harsanyiho transformace hry

Zdroj: vlastní zpracování

Zkratky pro další popis hry:

- VN – vysoké náklady,
- NN – nízké náklady,
- INV – bude investovat,
- NEI – nebude investovat,
- VST – vstoupí na trh,
- NEV – nevstoupí na trh.

Původní hru s neúplnými informacemi určuje:

- množina hráčů: $Q = \{A, B\}$,
- typy hráče A : $T_A = \{VN, NN\}$, hráč B má jeden typ,
- strategie firmy A : $X_A = \{INV, NEI\}$,
strategie firmy B : $X_B = \{VST, NEV\}$,

- pravděpodobnostní rozdělení $p(VN) = p$, $p(NN) = 1 - p$,
- výplatní funkce

$$f_A(x_A, x_B, VN), f_A(x_A, x_B, NN), f_B(x_A, x_B, VN), f_B(x_A, x_B, NN).$$

Transformovanou hru s nedokonalými informacemi určuje

- množina hráčů: $Q^* = \{1, 2, 3\} = \{(A, VN), (A, NN), B\}$,
- strategie hráčů 1 a 2: $Y_1 = Y_2 = X_A = \{INV, NEI\}$,
- strategie hráče 3: $Y_B = \{VST, NEV\}$,
- výplatní funkce: $g_1(y_1, y_2, y_3) = f_A(x_A, x_B, VN)$,

$$g_2(y_1, y_2, y_3) = f_A(x_A, x_B, NN),$$

$$g_3(y_1, y_2, y_3) = pf_B(x_A, x_B, VN) + (1 - p)f_B(x_A, x_B, NN).$$

V této úloze je potřeba vyřešit bayesovskou rovnováhu pro tři strategie. Jedna je pro firmu A s vysokými náklady, druhá pro firmu A s nízkými náklady a třetí pro firmu B .

Jak je zřejmé z matice výplatních funkcí, firma A s vysokými náklady má dominující strategii, takže její Bayesova rovnováha je při volbě NEI . Při nízkých nákladech na investici to již tak jednoznačné není, a bude záležet na strategii firmy B . Pokud se firma B rozhodne pro zařazení nového výrobku do svého portfolia, nebude chtít firma A investovat do navýšení výroby. Jestliže ale firma B na trh nevstoupí, firma A se rozhodne pro investici.

Před zvolením své akce musí firma A předpovědět akci, kterou provede firma B . Užítiky firmy A závisí na pravděpodobnosti r , kterou přiřadí volbám strategií firmy B . Pravděpodobnost r vyjadřuje vstup na trh a pravděpodobnost $1 - r$ značí nezájem firmy B o vstup na trh.

Užitky strategií firmy A s nízkými náklady jsou:

$$u_A(INV; r, NN) = 2r + 6(1 - r) = 6 - 4r,$$

$$u_A(NE; r, NN) = 3r + 5(1 - r) = 5 - 2r.$$

Firma A bude upřednostňovat investování, pokud $6 - 4r > 5 - 2r$, tzn. pokud pravděpodobnost vstupu firmy B na trh bude $r < \frac{1}{2}$. Pro pravděpodobnost q , kdy firma A zvolí INV , existují smíšené strategie nejlepších odpovědí

$$q^*(r) = \begin{cases} 1 & r < \frac{1}{2}, \\ \langle 0, 1 \rangle & r = \frac{1}{2}, \\ 0 & r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Smíšené strategie firmy B jsou závislé na pravděpodobnostech p a $1 - p$. Pravděpodobnost p naznačuje, že firma A je typu s vysokými náklady a $1 - p$ platí pro nízké náklady. Firma A s vysokými náklady jednoznačně volí NEI , což pro firmu B optimálně znamená užitek 3.

Užitky strategií firmy B jsou

$$u_2(VST; q) = 3p + (1 - p)(-1q + 3(1 - q)) = 3 - 4(1 - p)q,$$

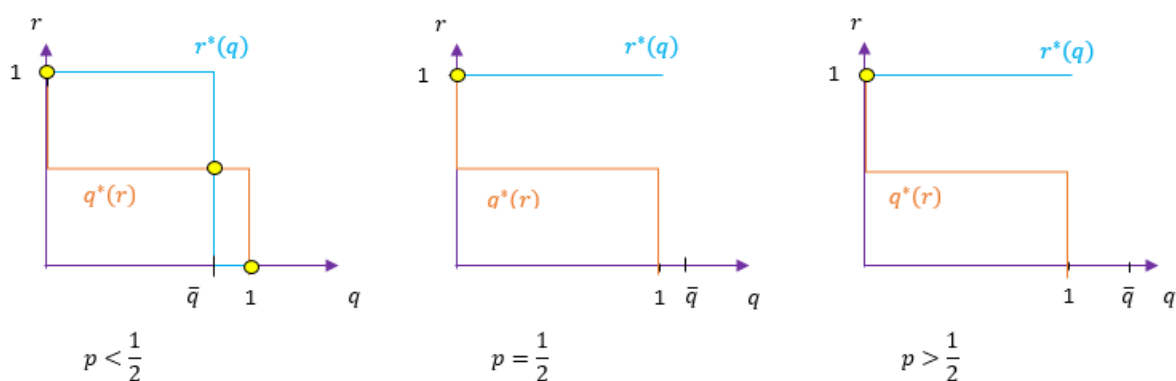
$$u_2(NEVST; q) = 0.$$

Firma B bude upřednostňovat zařazení nového výrobku, se kterým by vstoupila na trh, pokud $3 - 4(1 - p)q > 0$, tzn. $q < 3/(4(1 - p))$. Pro pravděpodobnost r , kdy firma B vstoupí na trh existují smíšené strategie nejlepších odpovědí

$$r^*(q) = \begin{cases} 1 & q < \bar{q}, \\ \langle 0, 1 \rangle & q = \bar{q}, \\ 0 & q > \bar{q}, \end{cases}$$

$$\text{kde } \bar{q} = \frac{3}{4(1-p)}.$$

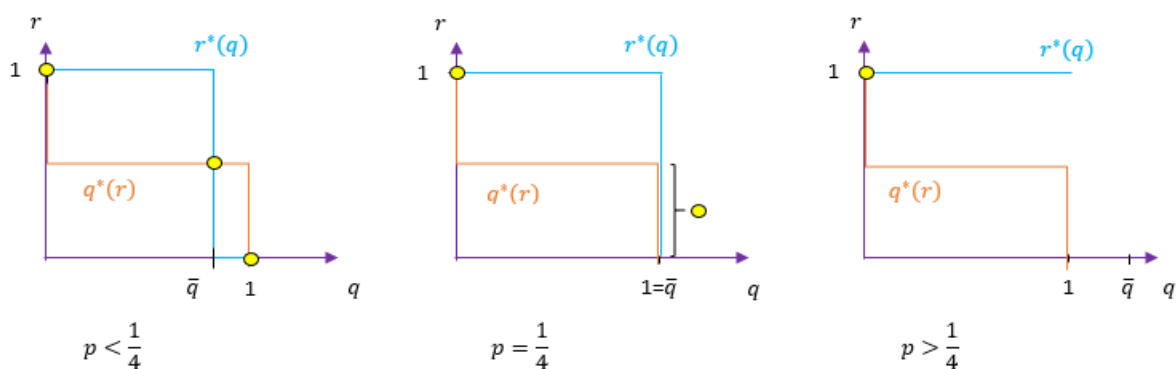
Bayesovy-Nashovy rovnováhy pro pravděpodobnosti p určující, zda firma A má vysoké či nízké náklady, jsou zobrazeny v níže uvedených grafech na obr. 5. Grafy znázorňují strategii pro předpoklad, že pravděpodobnost p vysokých i nízkých nákladů je stejná, tj. $p = \frac{1}{2}$. Tyto strategie jsou označeny žlutým bodem.



Obrázek 5: Strategie hry

Zdroj: Vlastní zpracování

Z grafů na obr. 5 lze vyčíst, že pro pravděpodobnosti $p = \frac{1}{2}$ a $p > \frac{1}{2}$ existuje pouze jediná strategie, kterou je čistá strategie $\{NEI, NEI; VST\}$. Na grafu vlevo je znázorněna situace, kdy pro $\bar{q} < 1$ existují tři strategie. Dvě čisté strategie a jedna smíšená. Tento graf je sice určený pro $p < \frac{1}{2}$, ale tyto tři strategie neplatí pro celý interval $p \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, jelikož jak je možné pozorovat na prostředním grafu, je pro $p = \frac{1}{2}$ hodnota $\bar{q} > 1$. Z výrazu $\bar{q} = \frac{3}{4(1-p)}$ je možné určit hodnotu p , pro kterou bude $\bar{q} = 1$. Tato rovnost platí pro $p = \frac{1}{4}$. Grafy znázorňující strategii pro předpoklad, že $p = \frac{1}{4}$, jsou znázorněny na obr. 6.



Obrázek 6: Strategie hry

Zdroj: Vlastní zpracování

Rovnovážné strategie odvíjející se od pravděpodobnosti $p = \frac{1}{4}$ jsou:

- Pro $p < \frac{1}{4}$ existují tři rovnovážné strategie, dvě čisté a jedna smíšená.

Čisté strategie jsou:

$$\{NEI, NEI; VST\}, \{NEI, INV; NEV\},$$

smíšená strategie je:

$$\left\{ NEI, INV \text{ s pravděpodobností } \frac{3}{4(1-p)}; VST \text{ s pravděpodobností } \frac{1}{2} \right\}.$$

- Pro $p = \frac{1}{4}$ existují dvě rovnovážné strategie, jedna čistá a jedna rovnováha kontinua.

Čistá strategie je:

$$\{NEI, NEI; VST\}$$

rovnováha kontinua je:

$$\{NEI, INV; VST \text{ s pravděpodobností menší než } \frac{1}{2}\}.$$

- Pro $p < \frac{1}{4}$ existuje pouze jediná strategie $\{NEI, NEI; VST\}$.

5.3 Příklad 3: Uzavřená aukce první ceny

Investor A zamýšlí v aukci koupit menší strojírenský podnik, jehož hodnotu si cení na 8 milionů. Do aukce se zapojil druhý investor B , jehož ocenění je tajné a není známo ostatním účastníkům. Podnik získá investor, jehož nabídka bude vyšší, a zaplatí za něj nabízenou částku. V případě shodné nabídky se předpokládá, že si investoři zisk z koupě rozdělí. Jakou optimální nabídku by měl investor A zvolit, aby aukci vyhrál?

Hra má 2 hráče, každý z nich má své ocenění podniku, které zná pouze on sám. Hodnocení druhého investora je popsáno distribuční funkcí rovnoměrného rozdělení $F(x)$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Oba investoři mají stejný prostor strategií (nabídek), ze kterého volí svoji nabídku pro aukci. Prostor nabídek a možné výhry investora A jsou zachyceny v tab. 2

Tabulka 2: Výplaty investora A

Aukce první ceny – ocenění investora A $v_A = 8$								
$b_A \backslash b_B$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3,5	0	0	0	0	0	0	0
2	6	3	0	0	0	0	0	0
3	5	5	2,5	0	0	0	0	0
4	4	4	4	2	0	0	0	0
5	3	3	3	3	1,5	0	0	0
6	2	2	2	2	2	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1	0,5	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Zdroj: vlastní zpracování

Jak je možné z tab. 2 vyčíst, je pro investora nabídka $b_A = 8$ bez jakéhokoli zisku, stejně jako kdyby se aukce neúčastnil. Této nabídce dominují všechny ostatní, proto je možné ji úplně vypustit. Předpokládané zisky pro jednotlivé nabídky jsou dané součinem možné výhry a pravděpodobnosti, že bude daná nabídka nejvyšší. Jejich výše vypočítaná vztahem

$$z(x) = (v - b(x))F(x)^{N-1},$$

a je zaznamenána v tab. 3. Hodnotu distribuční funkce rovnoměrného rozdělení $F(x)$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ udává vzoreček $F(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$, kde hodnoty α a β vycházejí z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Její hodnota je tedy rovna x .

Tabulka 3: Očekávané zisky jednotlivých nabídek

Aukce první ceny – ocenění investora A $v_A = 8$			
b_A	$(v-b(x))$	$F(x)^{N-1}$	$z(x)$
1	7	1	7
2	6	2	12
3	5	3	15
4	4	4	16
5	3	5	15
6	2	6	12
7	1	7	7
8	0	8	0

Zdroj: vlastní zpracování

Očekávaný zisk, jak je možné v tab. 3 vidět, je maximální pro nabídku výše 4.

Optimální nabídka

Optimální nabídku je možné vypočítat přímo pomocí vzorečku

$$b^*(v) = v - \frac{\int_0^{\bar{v}} F(x)^{N-1} dx}{F(v)^{N-1}} = v - \frac{\int_0^{\bar{v}} x^{N-1} dx}{v^{N-1}} = v - \frac{v^N}{Nv^{N-1}} = \frac{N-1}{N} v.$$

Výpočtem získaná optimální nabízená hodnota pro vlastní ocenění je

$$b^*(v) = \frac{N-1}{N} v = \frac{2-1}{2} 8 = 4.$$

Investor **A** by měl do obálky vložit nabídku ve výši 4 miliony Kč.

5.4 Příklad 4: Uzavřená aukce druhé ceny

Zadání pro tento příklad je shodné se zadáním příkladu 4. Otázkou je zjistit, jakou nabídku má investor použít pro maximalizaci svého zisku.

Prostor nabídek a možné výhry investora A jsou zachyceny v tab. 4.

Tabulka 4: Výplaty investora A

Aukce druhé ceny – ocenění investora A $v_A = 8$								
$b_A \backslash b_B$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3,5	0	0	0	0	0	0	0
2	7	3	0	0	0	0	0	0
3	7	6	2,5	0	0	0	0	0
4	7	6	5	2	0	0	0	0
5	7	6	5	4	1,5	0	0	0
6	7	6	5	4	3	1	0	0
7	7	6	5	4	3	2	0,5	0
8	7	6	5	4	3	2	1	0

Zdroj: vlastní zpracování

Na základě tab. 4 je možné určit optimální nabídku v aukci druhé ceny. Je patrné, že nabídka 8 dominuje všem ostatním nabídkám, a proto je pro investora nejvhodnější zvolit tuto nabídku.

Optimální nabídka by měla maximalizovat zisk investora. To je možné ověřit na základě zisků uvedených v tab. 5. Tyto zisky jsou vypočítány pomocí vztahu

$$z_1(v_1, b_1, b_{-1}) = \int_0^{b_1} (N-1)(v_1 - x)f(x)F(x)^{N-2} dx.$$

Tabulka 5: Očekávané zisky jednotlivých nabídek

Aukce první ceny – ocenění investora A $v_A = 8$	
b_A	$z = \int_0^{b_1} (N - 1)(v_1 - x)f(x)F(x)^{N-2} dx$
1	7,5
2	14
3	19,5
4	24
5	27,5
6	30
7	31,5
8	32

Zdroj: vlastní zpracování

Pro ukázkou je zde uveden výpočet zisku pro nabídku $b = 3$:

$$\begin{aligned}
 z(3) &= \int_0^{b_1} (N - 1)(v_1 - x)f(x)F(x)^{N-2} dx = \int_0^3 (2 - 1)(8 - x)1x^{2-2} dx = \int_0^3 (8 - x)x^0 dx \\
 &= \int_0^3 (8x^0 - x) dx = \left[8x - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 24 - 4,5 = 19,5.
 \end{aligned}$$

Z tab. 5 je zřetelné, že skutečně nejvyšší zisk dostává investor při podání nabídky, která se rovná jeho ocenění podniku. **Optimální nabídkou v aukci druhé ceny je nabídnout 8 milionů.**

ZÁVĚR

Hlavním cílem diplomové práce bylo seznámit čtenáře s teorií her a ukázat možnosti jejich aplikace v oboru ekonomie.

Vysvětlení pojmu teorie her a výčet oblastí, kde všude je možné tyto hry aplikovat, obsahuje první kapitola, v níž byl dále nastíněn historický vývoj a osobnosti, které se na něm svou prací podílely. Větší pozornost si zasloužili J. Ch. Harsanyi a R. J. Aumann, kteří výrazně přispěli k rozvoji her s neúplnou informací.

Druhá kapitola podává informace o základních pojmech a o možném členění her. Vysvětluje matematické modely používané k popisu rozhodovacích situací a důležitý pojem v oblasti teorie her, kterým je Nashova rovnováha. V rámci této kapitoly bylo popsáno řešení základních her s úplnými informacemi a na samém konci byl nastíněn rozdíl mezi úplnými a neúplnými informacemi.

Důležitou část diplomové práce obsahuje třetí kapitola, která byla zaměřena na hry s neúplnou informací. Hry s neúplnou informací mají velice obsáhlou teorii. Při jejím studiu jsem zjistila, že neexistuje téměř žádná literatura v českém jazyce, která by se touto problematikou systematicky zabývala. A ta, která existuje, popisuje hry s neúplnou informací pouze velmi stručně. V práci byly sepsány základní poznatky o statických hrách s neúplnou informací a o hrách opakovaných.

Čtvrtá kapitola byla zaměřena na aplikaci poznatků teorie her s neúplnými informacemi do samostatných oblastí, které jsou pod skupinu těchto her zařazovány. Jednou z nich byly signální hry a Spenceův signální model práce. Nakonec byla pozornost věnována aukcím, které mají v ekonomické praxi značné využití.

Poslední kapitola byla zaměřena na praktické využití získaných poznatků tohoto oboru matematiky v oblasti ekonomie. Byly představeny čtyři různé příklady, v nichž vždy vystupovali dva hráči. Příklad 1 a příklad 2 byly zaměřeny na statické hry, první na neúplné informace pro jednoho hráče a druhý na neúplné informace pro oba hráče. Příklady 3 a 4 se týkaly aukční teorie. V prvním byl objasněn výpočet optimální nabídky pro aukci první ceny a ve druhém bylo ukázáno, že v aukci druhé ceny by měl zájemce o aukci nabídnout cenu, která je shodná s jeho oceněním daného předmětu.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] DLOUHÝ, Martin a Petr FIALA. *Úvod do teorie her*. 2., přeprac. vyd. Praha: Oeconomica, 2009. ISBN 978-80-245-1609-7.
- [2] SAWA, Zdeněk. *Teorie her: studijní opora* [online]. 2015 [cit. 2019-04-26]. Dostupné z: <http://www.cs.vsb.cz/sawa/teh/opora/TEH-opora.pdf>
- [3] VOLEK, Josef. *Operační výzkum IV: teorie her a optimálního rozhodování*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2003. ISBN 80-7194-621-4.
- [4] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a její aplikace*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1991. ISBN 80-03-00358-X.
- [5] VON NEUMANN, John a Oskar MORGENSTERN. *Theory of games and economic behavior*. 3rd ed. Princeton: Princeton University Press, 1953.
- [6] HARSANYI, John C. *Games with Incomplete Information. Nobel Lecture* [online]. 1994 [cit. 2019-04-26]. Dostupné z: <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/harsanyi-lecture.pdf>
- [7] BERKELEYHAAS. *Nobel Laureate John C. Harsanyi, UC Berkeley economist and game theory pioneer, dies at 80* [online]. ©1996-2018 [cit. 2019-04-26]. Dostupné z: <http://www.haas.berkeley.edu/news/harsanyi.html>
- [8] ECONLIB. *John C. Harsanyi* [online]. ©1999-2019 [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: <https://www.econlib.org/library/Enc/bios/Harsanyi.html>
- [9] NOBELPRIZE.ORG. *John C. Harsanyi – Biographical* [online]. Nobel Media AB 2019 [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1994/harsanyi/biographical/>
- [10] NOBELPRIZE.ORG. *Robert J. Aumann – Biographical* [online]. Nobel Media AB 2019 [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2005/aumann/biographical/>
- [11] LINDAU NOBEL LAUREATE MEETINGS. *Laureate - Robert J. Aumann* [online]. 2018 [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: <https://www.mediatheque.lindau-nobel.org/laureates/aumann>
- [12] CHVOJ, Martin. *Pokročilá teorie her ve světě kolem nás*. Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4620-3.

- [13] HART, Sergiu. *Robert Aumann's Game and Economic Theory*. Scandinavian Journal of Economics [online]. 2006, 108(2), 185-211 [cit. 2019-04-27]. DOI: 10.1111/j.1467-9442.2006.00448.x. ISSN 0347-0520. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.1467-9442.2006.00448.x>
- [14] MORGENSTERN, Oskar a Robert J. AUMANN. *Essays in game theory and mathematical economics in honor of Oskar Morgenstern*. Mannheim: Bibliographisches Institut, c1981. ISBN 3411016094.
- [15] FIALA, Petr. *Aukce: teorie a praxe*. Praha: Professional Publishing, 2012. ISBN 978-80-7431-099-7.
- [16] HARSANYI, John C. Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, I-III. *Management Science*. Nov. 1967; Jan. 1968; Mar. 1968, (vol. 14), 159-82; 321-34; 486-502.
- [17] KOLÁŘ, Martin. *Aplikace teorie her* [online]. [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~mkolar/hry.pdf>
- [18] AUMANN, Robert J., Michael MASCHLER a R. E. STEARNS. *Repeated games with incomplete information*. Cambridge, Mass.: MIT Press, c1995. ISBN 0-262-01147-6.
- [19] OSBORNE, Martin J. a Ariel RUBINSTEIN. *A course in game theory*. Cambridge, Mass.: MIT Press, c1994. ISBN 0-262-65040-1.
- [20] BRANDLY, Mike. *History of Auctions* [online]. [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: <https://mikebrandlyauctioneer.wordpress.com/auction-publications/history-of-auctions/>
- [21] ABC. *A short history of auctions* [online]. ©2019 [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: https://www.abc.net.au/tv/auctionroom/about/auction_history.htm
- [22] TÝDEN.CZ. Aukční síň Sotheby's slaví 275 let. Co se vydražilo jako první? [online]. 11.03.2019 [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: https://www.tyden.cz/rubriky/relax/ostatni/aukcni-sin-sotheby-s-slavi-275-let-co-se-vydrazilo-jako-prvni_516245.html
- [23] W4T. *Aukční síň Christie's organizovala první dražbu před 250 lety* [online]. 04.12.2016 [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: <https://www.w4t.cz/aukcni-sin-christies-organizovala-prvni-drazbu-pred-250-lety-36880/>
- [24] CIO BUSINESS WORLD. *Historie eBay* [online]. 18.03.2010 [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: <https://businessworld.cz/ostatni/historie-ebay-5786>